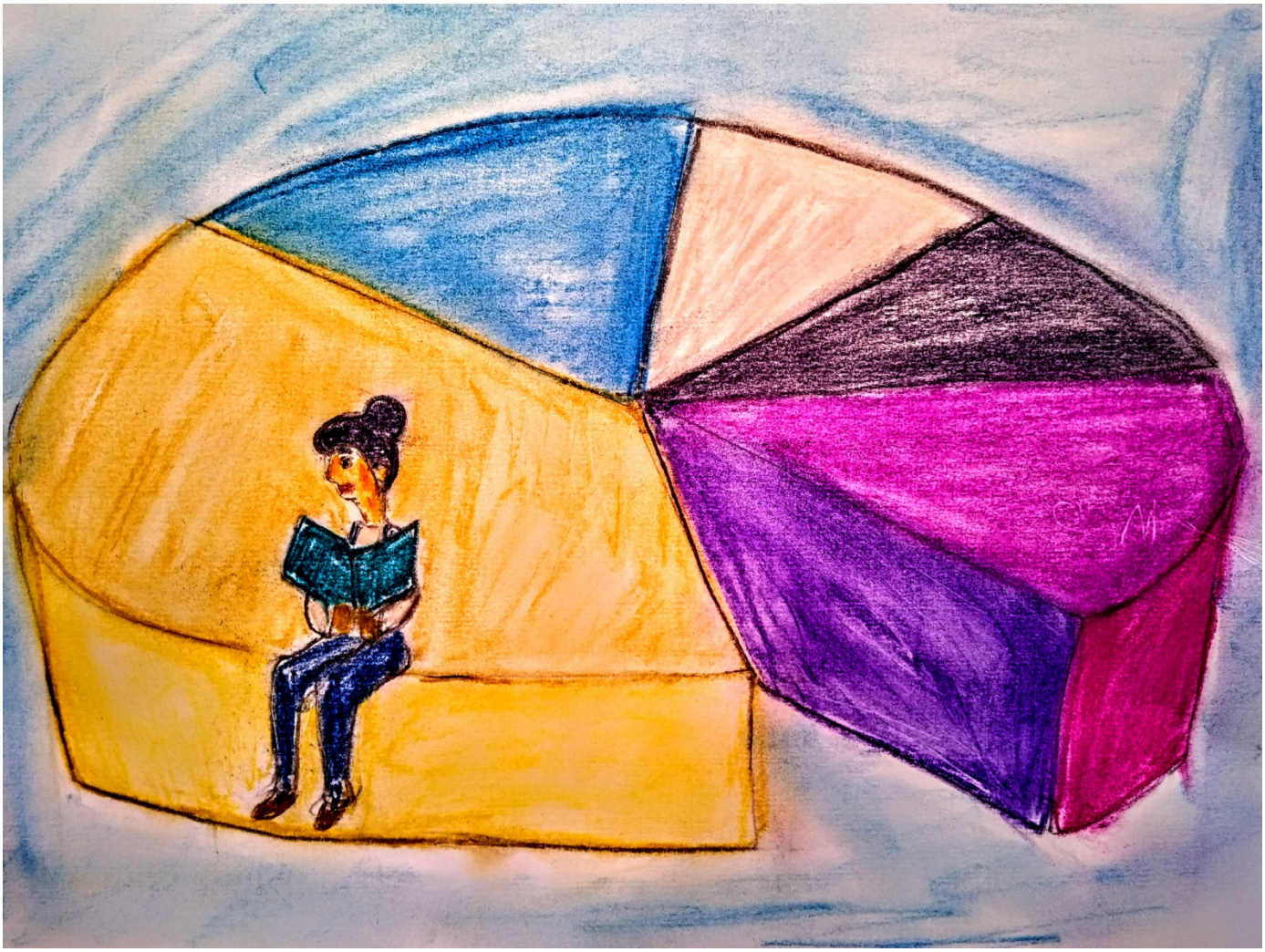
WŁODZIMIERZ LAPIS

MATEMATYKA PRAKTYCZNA

TAK DLA UCZNIA, JAK I DOROSŁEGO



Ilustracje (ta i pozostałe): Julia Zabrocka

Spis treści, czyli czego się możesz w tej książce spodziewać...

PORZĄDNY (MAM NADZIEJĘ), CHOĆ KRÓTKI WSTĘP

I. PRELIMINARIA, CZYLI O CO CHODZI Z TĄ MATEMATYKĄ?!
1. Przyczyna napisania tej książki… – matematyka!
2. Przemyślenia na temat skąd się biorą kłopoty uczniów (i dorosłych) z matematyką
3. Praktyczne metody poradzenia sobie z matematyką

II. PODSTAWY MATEMATYKI
1. Principia, czyli logiczne podstawy matematyki
2. Parametryzacja obiektów (czyli ich opis za pomocą przysługujących im własności)
3. Pojęcia (definicje), prawa (twierdzenia), prawidła (wzory, zasady, metody) i przepisy postępowania (algorytmy i procedury)
4. Przypuszczenia jako podstawa rozwoju matematyki (i nie tylko)

III. POLICZMY SIĘ Z LICZBAMI
1. Przystawka, czyli danie na dobry początek – rozróżnienie między liczbą a cyfrą, i nie tylko…
2. Przydatność liczb, czyli do czego służą liczby
3. Porównywanie liczb – o ile, ile razy, ...
4. Policzalność – co to takiego?
5. Przecinki, kropki, średniki i spacje stosowane przy zapisie liczb

IV. PO OBU STRONACH MOCY, CZYLI CENTRALNA ROLA ZERA
1. Podziały zbioru liczb względem zera: liczby dodatnie i niedodatnie, ujemne i nieujemne
2. Pochodne podziału liczb względem zera: liczby przeciwne i wartość bezwzględna
3. Przykład „osi liczbowej bez zera”

V. POZOSTAŁE RODZAJE LICZB
1. Przegląd i omówienie rodzajów liczb
2. Przybliżenia (czyli zaokrąglenia) liczb
3. Pozycyjne i niepozycyjne systemy zapisu liczb

VI. PROSTE ZALEŻNOŚCI MIĘDZY LICZBAMI – W MATEMATYCE I W PRAKTYCE
1. Podstawowe określenia i ich oznaczenia (przydatne w kolejnych paragrafach tego rozdziału)
2. Przekształcanie wzorów
3. Proporcje proste i odwrotne
4. Przeliczanie walut

VII. PRZEKSZTAŁCANIE LICZB POPRZEZ WYKONYWANIE NA NICH OPERACJI
1. Podstawowe operacje na liczbach
2. Porządek wykonywania działań
3. Praktyczne wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia

VIII. POTRÓJNA ZALEŻNOŚĆ, CZYLI POTĘGI, PIERWIASTKI I … LOGARYTMY
1. Potęgi i potęgowanie
2. Przedstawienie liczby w postaci wykładniczej
3. Pierwiastki i pierwiastkowanie
4. Pozostały nam jeszcze logarytmy i oczywiście… logarytmowanie

IX. PROCENTY
1. Procenty rozpatrywane na liczbach
2. Procenty w sklepie – podwyżki i obniżki cen towarów; VAT – cena brutto, netto i tara; prowizja i narzut
3. Procenty w bankach – pożyczki i lokaty
4. Procenty w płacach i podatkach od nich (płaca: brutto, netto i tara; progi podatkowe; progi podatkowe a podatek liniowy)

X. POWIĄZANIA I PODZIAŁY

1. Przyporządkowania jednoznaczne, czyli funkcje
2. Pary funkcji odwrotnych
3. Porządki (czyli ciągi)
4. Podziały i hierarchie

XI. POMIARY I OBLICZENIA NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI

1. Płaszczyznowe obiekty, ich pomiary i obliczenia
2. Przestrzenne obiekty, ich pomiary i obliczenia
3. „Padał deszcz", czyli o przechodzeniu między wymiarami ;)

XII. PRZEKSZTAŁCANIE I PORÓWNYWANIE WIELKOŚCI METRYCZNYCH

1. Przeliczania wielkości między różnymi systemami metrycznymi
2. Przedrostki w jednostkach metrycznych
3. Przeliczanie wartości o różnych przedrostkach z tego samego systemu metrycznego
4. Podobieństwo (skala, różne rodzaje skal na mapie i planie)
5. Powierzchnie i przestrzenie (zasada + zmiana wielkości na ksero, formaty papieru, którą pizzę warto zamówić?, dobór czasu w naświetlaniu zdjęcia)

XIII. PRZYPADKI

1. Przydatna jako podstawa dalszych działań kombinatoryka, czyli zliczanie z jakimi i z iloma przypadkami możemy mieć do czynienia
2. Prawdopodobieństwo – jaką mam szansę na osiągnięcie sukcesu (tj. że szczęście będzie mi sprzyjać)?
3. Podstawowe pojęcia statystyczne (wartości średnie)
4. Prezentacje danych (różne rodzaje wykresów, grafy, tabele)

XIV. PRAWIDŁA NATURY

1. Przechadzki wśród liczb godnych uwagi
   a) Pi (co kołem się nie-toczy)
   b) Podział złoty i liczba φ (czyt.: fi)
   c) Procenty maksymalne, czyli liczba e
2. Posiadają trzy kąty, czyli… trójkąty
   a) Perspektywa
   b) Pod górkę i z górki
   c) Proporcje w trójkątach podobnych
3. Przekształcenia:
   a) powiększenia,
   b) pomniejszenia,
   c) przesunięcia,
   d) przekręcenia (czyli obroty),
   e) przełożenia na drugą stronę, czyli odbicia, czy symetrie (plus dopowiedzenie o figurach symetrycznych)
4. Pokrycia powierzchni (puzzle, dywany, mapy)
5. Pomniejszone powielenia, czyli fraktale

XV. POZA PRZYRODĄ (NATURĄ) – CZYLI MATEMATYKA DOMEM BEZ DRZWI, JAK I Z DRZWIAMI POZNANIA

1. Początki matematyki i jaskinia Platona, czyli świat poza ziemską rzeczywistością
2. Przypadki z nieskończonością i o drzwiach w Krainie Matemagii

XVI. PRZYDATNOŚĆ MATEMATYKI; PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI; POTĘGA MATEMATYKI; PRZEOBFITY KIELICH DOBRODZIEJSTW MATEMATYKI; PRZEGLĄD POZOSTAŁYCH ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI – BYŚ WIEDZIAŁ, ŻE MATEMATYKA POTĘGĄ JEST! (nie mogłem się zdecydować który dać tytuł, więc dałem wszystkie ☺; wszystkie oczywiście na „P")

POSŁOWIE

PORZĄDNY (MAM NADZIEJĘ), CHOĆ KRÓTKI WSTĘP

Większość z nas wspomina (czy – jeśli jesteś jeszcze uczniem – przeżywa) matematykę z lat szkolnych niestety jako przedmiot trudny, niezrozumiały, nikomu do niczego niepotrzebny (takie swoiste „3 N”).

Jak się jednak potem „na stare lata” okazuje, jest ona przydatna w życiu każdego człowieka, i to na dwa sposoby:

- wyrabia w nas nawyki logicznego myślenia, kojarzenia faktów, właściwej analizy danych, wyciągania wniosków, ...,
- uposaża nas w podstawowe umiejętności matematyczne przydatne w życiu codziennym.

Są to zasoby, które powinien posiadać (tj. znać i umieć) każdy człowiek – zarówno każde dziecko, jak i każdy dorosły. Ponieważ jednak – jak dobrze o tym wiesz – nie zawsze tak jest, w związku z powyższym, przygotowałem niniejszą książkę, by pomóc tym, którzy sami widzą potrzebę nadrobienia braków w tym zakresie.

Cały materiał został tu zgromadzony w 16 rozdziałach, mieszczących w sumie 56 paragrafów. Tytuł każdej z tych części (rozdziałów i paragrafów), jest na literę „P”, bo i w tej książce wszystko jest podane na „P”: porządnie, pięknie, przyzwoicie, przystępnie, przydatnie i praktycznie (przez te „P” zapewne będzie trudna do przetłumaczenia, ale dobry tłumacz na pewno sobie poradzi). Myślę, że gdy teraz już wiesz jaka jest to książka – lepiej i łatwiej będzie Ci zgłębiać zawarty w niej materiał.

Jako dorosły nie zdziw się przy tym, gdy kiedyś podbierze Ci ją Twoje dziecko – jemu też się ona przyda w przerabianiu bieżącego materiału z zajęć w szkole.

Z kolei jako uczeń – nie zdziw się, gdy kiedyś podbierze Ci ją Twój rodzic. Skoro jemu się ona przyda, tym bardziej wiedz, że trzeba pilnie uczyć się w szkole matematyki, by nie mieć z niej potem braków (co jest niedopuszczalne, bo w życiu na pewno Ci się ona przyda).

PRELIMINARIA, CZYLI O CO CHODZI Z TĄ MATEMATYKĄ?!

1. Przyczyna napisania tej książki… matematyka!

Poniżej najpierw napiszę Ci „**czym jest i jak działa matematyka**”. Dzięki temu zrozumiesz dlaczego naprawdę warto umieć matematykę, co z kolei da Ci porządnego „kopa” do rzetelnego zaznajomienia się z tą książką.

Otóż matematyka jest nauką (wielkie słowa!) o czymś czego nie ma (a to już jest „zjazd na łeb na szyję”). Bo czy ktoś widział kiedyś liczbę, albo trójkąt (figurę bez grubości)?!, bo ja (matematyk!) – bynajmniej nie!

To o co właściwie chodzi w tej matematyce i po co uczyć się o czymś, czego nie ma?!

Otóż matematyka za pomocą pojęć abstrakcyjnych (wymyślonych, nie istniejących w rzeczywistości) opisuje obiekty abstrakcyjne (matematyczne), by za ich pomocą móc opisać otaczający nas świat. Trochę skomplikowane...? – Niekoniecznie. Zobacz zresztą sam(a):

Podstawą opisu w matematyce są liczby. Czym są liczby? Mimo że jestem matematykiem – uwierz mi – nie wiem! Co nadto, jak żyję w ogóle nie widziałem żadnej liczby. Ktoś powie: „Hola! A na przykład 3 – czy to nie jest liczba?”. Odpowiem: nie – to jest cyfra, czyli znak graficzny służący do zapisu liczby. Ok, zatem może 13 jest już liczbą? Znowu nie! Jest zestawieniem dwóch cyfr („1” i „3” w tej właśnie kolejności), cały czas dającym jedynie zapis liczby 13. Odpowiesz: Ok, już „łapię”... Czym jednak jest liczba? No właśnie matematyka tego nie definiuje (tj. nie określa w ścisły sposób). Mamy w niej jedynie definicje (inaczej: ścisłe określenia) konkretnych rodzajów liczb (jak liczby parzyste, pierwsze, rzeczywiste, wymierne, dodatnie, nieujemne, naturalne, ...), ale definicji liczby jako takiej nie ma! Powiesz: „A to dobre!”, a ja Ci w tym przytaknę: „A to dobre!”.

Najbardziej podstawowy rodzaj liczb – to liczby naturalne. Matematycy formalnie je definiują, ale ty zapewne masz jedynie „mgliste” pojęcie w ich zakresie w stosunku do tego co o nich wiedzą matematycy. Nie wiesz co to 2, i nie wiesz co to 3 (matematycy to wiedzą!), ale wiesz, że 2 jabłka i 3 jabłka – to 5 jabłek; analogicznie wiesz, że 2 gruszki i 3 gruszki – to pięć gruszek; że 2 książki i 3 książki – to 5 książek; ... i w końcu uogólniasz, że 2 obiekty danego typu i 3 obiekty tego samego typu, to pięć obiektów tego typu (i że zawsze tak jest), w wyniku czego mówisz, że 2 i 3 – to razem 5. Tym samym „wchodzisz” w matematykę… „tylnimi drzwiami” (wszyscy w dzieciństwie tak robimy) – tymi, którymi matematycy z niej wychodzą (dając wyniki swej pracy do działań praktycznych), bo matematyk wie, że 2 + 3 = 5 i stąd wnioskuje że – chociażby – 2 kredki i 3 kredki, to 5 kredek. Co jednak jest najważniejsze, to grunt, że się nie mylisz, i że rzeczywiście tak jest, jak to wywnioskowałeś, że 2 i 3 – to zawsze 5, i to dowolnie co byśmy nie sumowali, byle – za każdym razem – to samo! (tj. do jabłek dodajesz jabłka i otrzymujesz pewną liczbę jabłek, a do gruszek gruszki i otrzymujesz pewną liczbę gruszek).

Żyjący w VI w. p.n.e. grecki filozof Pitagoras, powiedział, że *Liczba jest istotą wszystkich rzeczy* (jest podstawą wszystkiego), a nawet, że *Liczby rządzą światem*. *Naucz się rządzić liczbą, a sam będziesz rządzić światem!* (to ostatnie stwierdzeni nie jest już Pitagorasa, lecz moje ;)).

Za pomocą liczb określasz długość i szerokość stołu, o którym zakładasz (przybliżasz), że jest prostokątem (choć idealnym prostokątem on nie jest – nie ma w świecie rzeczywistym idealnych obiektów). Za pomocą stosownego wzoru liczysz powierzchnię tego prostokąta („robiącego” za obraz stołu) i po dodatkowych obliczeniach (znowu matematyka! – wykonujesz je na podstawie danych podanych na puszcze farby dotyczących jej wydajności) – wiesz już ile puszek farby trzeba kupić, by starczyło Ci jej do pomalowanie stołu (a nie jakiegoś abstrakcyjnego prostokąta!).

Jak więc widzisz – obracaliśmy się w świecie abstrakcyjnym (liczb, prostokątów, rachunków liczb), by w wyniku tego uzyskać coś praktycznego – pomalowany stół, bez wydatkowania zbędnych pieniędzy na nadmiarowe puszki farby.

Do tego osiągnęliśmy to w sposób uproszczony (nie zważaliśmy na jakieś uszczerbki czy nierówności stołu – zakładaliśmy, że jest prostokątny), operując na uproszczonym obiekcie (prostokącie) i wykonując abstrakcyjne operacje (obliczenia) na abstrakcyjnych obiektach (liczbach). Brzmi to może trochę „masakrycznie”, ale właściwie sprowadza się do upraszczania zastanej sytuacji, następnie na przekształceniach dokonywanych na owym uproszczeniu, i w końcu na zastosowaniu takiego wyniku w praktyce. Jak więc widzisz – matematyka nie tylko

upraszcza życie (moja definicja matematyki: *matematyka, to nauka o upraszczaniu*), ale i – właśnie dzięki owemu upraszczaniu – ma horrendalne zastosowania w praktyce. Na dobrą sprawę: *gdzie się nie obejrzysz – tam matematyka* (też moje!; dodam że jest tak oczywiście jedynie o tyle, o ile dobrze patrzysz).

Właśnie! *Matematycy – to specjaliści od patrzenia* (znowu moje!): najpierw widzą to co mają (jakieś dane), a następnie wi(e)dzą, co z tym zrobić, tj. jak te dane przetwarzać, by w oparciu o nie otrzymać pożądany wynik (to się właśnie nazywa „robienie matematyki").

Skąd oni to wszystko wiedzą? Z nauki, praktyki, doświadczenia, wyrobienia, umiejętności myślenia, ...

Ty też możesz być matematykiem na miarę swoich potrzeb! (kolejne moje hasło!) I to właśnie w tym celu napisałem tę książkę! – byś radził sobie z matematyką i by ona była Ci w życiu jak najbardziej przydatna i przyjazna.

Obecnie, jak już wiesz „co to jest matematyka", na pewno łatwiej będzie Ci zrozumieć „**dlaczego warto uczyć się matematyki?**". O tym właśnie piszę tu poniżej.

11 listopada 2001 r. w tygodniku „*Wprost*", ukazał się tekst Krzysztofa Łozińskiego pt. „*Lek na ignorancję; Dlaczego maturzyści powinni zdawać matematykę*", w którym czytamy:

> *Kilkanaście lat temu uczestniczyłem w spotkaniu z kilkunastoma wykształconymi Chińczykami z Singapuru i Hongkongu, kilkoma Hindusami, Japończykami oraz kilkoma Polakami. Oczywiście wszyscy rodacy legitymowali się wyższym wykształceniem i uważali się za światłych ludzi. W pewnym momencie jeden z nich powiedział: „Nigdy nie mogłem zrozumieć matematyki, ale na szczęście nie była mi do niczego potrzebna". U Chińczyków, Hindusów i Japończyków zdanie to wywołało szok. Ludzie ci, a zwłaszcza Japończycy, uważają, że przyznanie się do niemożności opanowania matematyki na poziomie szkolnym kompromituje każdego, kto chce uchodzić za światłego człowieka.*
>
> *Minister Krystyna Łybacka tłumaczyła tymczasem dziennikarzom, że „wprowadzenie obowiązkowego egzaminu z matematyki w szkole ponadgimnazjalnej skończy się katowaniem humanistów matematyką". Zacytowanie tej opinii przez prasę amerykańską groziłoby powstaniem nowych polish jokes* [niewybredne amerykańskie żarty o Polakach – W.L.]. *Łatwo sobie wyobrazić na przykład taki dowcip:*
>
> *„Co mówi Polak, kiedy nie umie obliczyć podatku VAT?".*
>
> *„Jestem humanistą" – tak brzmiałaby prawidłowa odpowiedź.*
>
> *Problem ujawniony przez minister edukacji jest znacznie poważniejszy niż tylko to, czy na maturze ma być egzamin z matematyki, czy nie. Konieczne jest radykalne przewartościowanie pojęć:* ***ktoś, kto nie może opanować szkolnej matematyki, to*** *nie humanista, lecz* ***ignorant****.* [wytłuszczenie moje – W.L.]
>
> *Wbrew powszechnym wyobrażeniom matematyka w szkole nie służy jedynie do tego, byśmy nauczyli się liczyć. Gdyby tak było, wystarczyłoby kupić każdemu kalkulator zamiast sterty podręczników. Matematyka uczy logicznego myślenia i dyscypliny naukowej. (...) Usunięcie matematyki z egzaminu maturalnego jest więc uderzeniem w polską gospodarkę, uderzeniem w społeczeństwo i jego przyszłość.*

Tekst ten zawiera wiele wątków. Wśród nich przewija się:

- tłumaczenie się z nieznajomości matematyki słowami „jestem humanistą", które świadczy o kompletnej ignorancji wypowiadającej te słowa osoby,
- stwierdzenie, że warto uczyć się matematyki, gdyż nie dość, że przydaje się w różnych dziedzinach wiedzy, to jeszcze odpowiednio rzeźbi bruzdy w naszym mózgu.

Tak jak zapewne nie wyobrażasz sobie nieznajomości języka ojczystego, czy co najmniej jednego z międzynarodowych języków obcych – tak samo, jak widzisz, trudno jest sobie wyobrazić wykształconym osobom kogoś, kto jest ignorantem matematycznym.

Przy tym, co tu bardzo ważne!, *matematyka przydaje się nie tylko matematykom (by gnębić humanistów) czy adeptom nauk ścisłych czy technicznych, ale ma zastosowanie w KAŻDEJ dziedzinie wiedzy. Pomyśl sobie choćby o lekarzu, który w ciągu dwudziestu minut wyraża się o planowanym zabiegu, że:*

- *wiąże się z ryzykiem jak jeden do miliona,*
- *jest w 99% bezpieczny,*

- *zazwyczaj przebiega bez komplikacji,*

*to na ile lekarz ten powinien być wiarygodny dla pacjenta w podejmowaniu decyzji, jakie mogą zaważyć na jego zdrowiu czy nawet życiu? A może kolejnym krokiem będzie zapisanie na recepcie 10% roztworu pewnego leku zamiast 0,1%? Czy takie świadectwo matematycznej ignorancji należy przyjąć jako normę? (*tekst z artykułu Barbary Ćwikieł pt. „Czy warto zdawać matematykę na maturze")

Wtedy – niestety – jak najbardziej na miejscu jest następujący żart:

> *Spotykają się dwaj kumple ze studiów. Jeden do drugiego: „Wiesz co Jasiu, jak sobie pomyślę jaki ze mnie inżynier, to się k* boję iść do lekarza..."*

Z kolei w oparciu o tekst rektora Politechniki Gdańskiej, prof. Janusza Rachonia, w którym wypowiada się on na temat „co daje matura z matematyki?" – stworzyłem analogiczną własną listę 20 stwierdzeń „co daje dobre rozeznanie w zakresie matematyki?". Otóż **dobre rozeznanie w nakresie matematyki**:

1. jest furtką do kariery zawodowej,
2. daje większe możliwości na znalezienie atrakcyjnej pracy,
3. decyduje w dużej mierze o przyszłym sukcesie zawodowym,
4. decyduje o naszym być albo nie być na europejskim, a nawet światowym rynku pracy,
5. daje przeciętnie wyższe zarobki w przyszłym życiu zawodowym,
6. znacząco zmniejsza szanse na zasilenie szeregów bezrobotnych z wyższym wykształceniem.,
7. zmniejsza groźbę przymusowej emigracji zarobkowej po skończeniu studiów,
8. dowodzi rzeczywistej dojrzałości w kształtowaniu swojej przyszłości,
9. sprawia, że studia techniczne są w zasięgu naszych możliwości,
10. ułatwia studiowanie na kierunkach ścisłych i technicznych,
11. daje świadectwo analitycznego sposobu myślenia przydatnego wszędzie, niezależnie od rodzaju pracy,
12. daje motywację do dalszej nauki samej matematyki,
13. wyzwala od zahamowań w kontaktach z matematyką na co dzień,
14. pozwala lepiej radzić sobie w życiu codziennym,
15. dowodzi umiejętności logicznego rozumowania i jasnego formułowania myśl,
16. chroni przed analfabetyzmem matematycznym,
17. nie pozwala na manipulowanie nami przez środki masowego przekazu i polityków,
18. daje poczucie bezpieczeństwa w obcowaniu z otaczającym nas światem liczb,
19. daje trzeźwe spojrzenie na wszechobecne dane statystyczne,
20. pobudzając do myślenia, wybudza z letargu intelektualnego.

Jak potężna i przydatna jest dla nas matematyka, możemy też zobaczyć po poniższym fragmencie tekstu Marka Legutko z Przeglądu Tygodniowego z 7 kwietnia 1999 r., s. 20 (celem lepszej percepcji zmieniłem jedynie kolejność pojawiających się tam punktów). Otóż **matematyka rozwija szczególnie umiejętności**:

1. klasyfikowania obiektów (przy formułowaniu definicji);
2. rozpoznawania, czy dany obiekt spełnia określone kryteria (przy posługiwaniu się definicjami);
3. dostrzegania ogólnych prawidłowości, podobieństw i analogii dotyczących danych obiektów (przy formułowaniu hipotez, wniosków i ogólnych zasad);
4. argumentowania, korzystając z danych faktów (przy posługiwaniu się twierdzeniami);
5. określania instrukcji i kroków postępowania;
6. wskazywania i uznawania konsekwencji przyjętych założeń (przy logicznym wnioskowaniu);
7. opisywania danych obiektów i procesów za pomocą liczb, funkcji i figur geometrycznych (tzw. matematyzowanie);
8. postępowania według danych reguł;
9. korzystanie z danych ilościowych i jakościowych opisanych w różny sposób (przy interpretacji danych statystycznych);
10. posługiwania się językiem w sposób jasny, zwięzły, właściwy dla danej sytuacji (matematyka sprzyja kształtowaniu szacunku dla języka).

W artykule *Matura bez obowiązkowej matematyki? NIK: szkoła zarzyna pasję, a nie uczy* (zamieszczonym na https://tvn24.pl/lodz/matematyka-nie-bedzie-obowiazkowa-na-maturze-nik-zglasza-taki-postulat-ra910848-2293613, autor: bż/gp) czytamy:

> *Z faktami nie można dyskutować – im lepiej w danym kraju ze znajomością matematyki, tym lepiej dla gospodarki. I da się to policzyć na podstawie międzynarodowych badań. „Podniesienie wskaźnika wyników z testów PISA (Programu Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów) w obszarze matematyki i nauk ścisłych o 100 pkt przekłada się na roczny wzrost PKB rzędu ok. 1,7 proc." – czytamy w najnowszym raporcie Najwyższej Izby Kontroli.*

Z kolei w „Gazecie Wyborczej" z 12-13 VI 2004 r., w artykule *O czym nie mówi szkoła* (str. 19-20), znajdziemy następujące ciekawe wypowiedzi nt. matematyki:

1) Prof. Łukasz Andrzej TURSKI:

> *Uważam, że każdy powinien znać matematykę. Nieszczęścia, które spotkały cywilizacje, związane były z tym, że społeczeństwa głupiały. I to głupiały na własne życzenie, głównie dlatego, że nie znały matematyki.*

2) Danuta ZAGRODZKA:

> *W czasach, w których co pięć minut pojawiają się jakieś nowe przedmioty czy nowe technologie, bez matematyki i nauk ścisłych daleko nie zajdziemy. Zostaniemy w tyle, a świat będzie nam dalej uciekał.*

3) Prof. Wiktor OSIATYŃSKI:

> *Jest dla mnie oczywiste, że człowiek, który kończy szkołę, powinien mieć elementarne umiejętności logicznego myślenia, wiedzy matematycznej i umiejętność posługiwania się językiem matematycznym na niezbyt skomplikowanym poziomie.*

Myślę, że dobrym podsumowaniem tych 3 wypowiedzi, jest poniższa wypowiedź byłego ministra edukacji – prof. Mirosława Handke:

Matematyka jest piękna, tam jest czysta logika.
Nie ma ludzi, którzy nie są matematycznie uzdolnieni, są tylko ci, którzy mieli pecha i trafili na złego nauczyciela lub przespali część lekcji.

Na koniec podam Ci jeszcze tekst, który – ze względu na użyty język – mam nadzieję najbardziej powinien trafić Ci do serca. Jest to wypowiedź Marka Piekarczyka (lidera heavy-metalowego zespołu TSA) z „Gazety Wyborczej" z 31 VIII – 1 IX 1991 r.:

> *Ludzie! Najpiękniejsza rzecz na świecie to uczyć się i poznawać świat. Róbcie wszystko, aby wam belfry tego nie obrzydziły. Jak ktoś przestanie się uczyć, poznawać, to już koniec, starość. Już nic nowego nie zobaczy. Nawet jak się ma te gówniane trójki, nie przejmować się, robić swoje, i kochać tę matmę niezależnie od baby która jej uczy i chce ci ją obrzydzić.*

Po prostu – chciał nie chciał / jak by nie było – **ucz się więc matematyki!**, bo na pewno będzie Ci ona w życiu potrzebna. Na pewno nigdy nie pożałujesz włożonego w to swego serca i wysiłku.

2. Przemyślenia na temat skąd się biorą kłopoty uczniów (i dorosłych) z matematyką, czyli diagnoza

Wiele (a nawet większość!) osób ma kłopoty z matematyką. Mówią, że jest ona trudna i że sobie z nią nie radzą. Czy rzeczywiście matematyka jest trudna, czy też tylko na taką wygląda? A może sprawia trudności i dlatego uznawana jest za trudną? A jeżeli tak jest, to dlaczego tak jest?

Kłopoty z matematyką dosięgają uczniów podstawówek, szkół średnich i branżowych, studentów, a nawet osoby wyedukowane. Większość osób narzeka na matematykę. Jawi się im jako zmora, z którą nie mogą dać sobie rady.

Wiele osób opanowanie matematyki uważa za niemożliwe (w ich przypadku), a tych, którzy posiedli te sztukę uważają oni za „mózgi".

Czy rzeczywiście tak jest? Czy to może są tylko mity? Mity tym groźniejsze, im bardziej pielęgnowane (szef propagandy hitlerowskiej – Goebbels – zwykł mawiać, że kłamstwo powtarzane 100 razy staje się prawdą).

Poszukajmy prawdziwych przyczyn i właściwego obrazu tego stanu rzeczy.

Moim zdaniem (nauczyciela matematyki) istnieje kilka przesłanek, które legły u podstaw permanentnego stanu braku umiejętności matematycznych. Zanalizujmy je po kolei:

1. pierwsze niepowodzenia,
2. nawarstwiające się zaległości i „niedźwiedzia przysługa”,
3. abstrakcyjność,
4. zły belfer,
5. lapsusy,
6. roztargnienie,
7. zniechęcenie.

Ad 1. – pierwsze niepowodzenia

Matematyka nie jest – wbrew pozorom – nauką o liczeniu. Jest ona nauką o myśleniu. Zastanawiałeś się kiedykolwiek nad tym? Może tak… może nie... Zobacz więc teraz. Umiesz liczyć, a mimo to z matematyką nie dajesz sobie rady. Dlaczego? – bo ograniczałeś się głównie do liczenia i tak właśnie byłeś zorientowany swą osobą na matematykę. Tego Cię nauczono w pierwszych klasach szkoły podstawowej, a potem postawiono to na głowie, gdyż zaczęto wymagać „czegoś więcej”. Pogubiłeś się i teraz jesteś już „pogubiony”. Jeśli jeszcze to czytasz – znaczy że chcesz się „odpogubić”. To bardzo dobrze rokuje... – przechodzimy więc dalej!

Ad 2. – nawarstwiające się zaległości i „niedźwiedzia przysługa”

Być może pogubiłeś się nawet wcześniej. Gdy nie uważałeś na lekcji, gdy pani tłumaczyła ile jest 2 razy 2 (i do dzisiaj tego nie wiesz), to na pewno masz i kłopoty z wiedzą na temat tego ile to jest 20 razy 20 (bo trzeba tu wykorzystać poprzednio nie-zdobytą wiedzę).

Dalej, nie wiedząc ile to jest 20 razy 20 nie będziesz miał pojęcia ile to jest 20 do kwadratu. Po prostu gdy tak nawarstwiają się Twoje zaległości – sam już nie wierzysz w możliwość wyjścia z tego zaklętego kręgu niewiedzy!

Obecny system oświaty wymaga na nauczycielach promowanie uczniów, bo inaczej (gdyby ich nie promowali) ponoć świadczyło by to na ich niekorzyść, że są złymi nauczycielami, bo w przeciwnym razie przecież by nauczyli ucznia! (jest to jednak niezmiernie chybione myślenie! – żeby nauczyciel nauczył ucznia, ten sam musi się chcieć nauczyć, bo jak się uprze, to nauczyciel choćby „stawał na głowie” – i tak nie będzie w stanie go nauczyć). Tego typu retorykę często stosują rodzice, czy dyrekcja szkoły, próbując nią wymusić na nauczycielu zawyżenie oceny z jedynki do pozytywnej. Nauczyciel uginając się – wyrządza sobie, uczniowi, rodzicowi i szkole tę „niedźwiedzia przysługę”, która bardzo szybko „odbija się czkawką” na każdym z nich. Wszak jeśli uczeń nie poradził sobie z matematyką w jednej klasie – nie poradzi z nią sobie i w kolejnej, a wtedy przyjdzie kolejna niedźwiedzia przysługa – przejdzie do kolejnej klasy, itd. Po drodze wszyscy będą się tu męczyć z uwagi na tę nie(dź)wiedzę ucznia (on – nie dając sobie rady, rodzice i dyrekcja – walcząc z nauczycielem, nauczyciel – będąc obiektem ataku ze strony rodziców i dyrekcji). Dodatkowo nauczyciel będzie miał wyrzuty sumienia, a i uczeń szybko spostrzeże „czy się uczy czy też nie – promocja należy się!” i w ogóle nie będzie się uczyć matematyki. Całkiem bez sensu! Potem przyjdzie matura – i oczywiście uczeń ją położy. Wtedy dopiero na dobra sprawę wszyscy z tej „czwórcy” (uczeń, dyrekcja, uczeń i nauczyciel) będą ubolewać, że dali się wmanewrować w tę niezdrową wieloletnią sytuację. Nawet do tego ten niezdrowy system się „dostosował” – wprowadzając tzw. „minimum programowe” (bardzo zawężony materiał nauczania) i dając zaliczenie matury na poziomie jedynie 30 % (co jest dla mnie niezmiernie żenującym poziomem wiedzy).

Ad 3. – abstrakcyjność

Matematyka operuje na tworach abstrakcyjnych. Któż z nas widział kiedykolwiek trójkąt? Ja owszem – drogowy czy małżeński – TAK. Jednak matematycznego – NIE. Matematyczny trójkąt, to figura geometryczna płaska, a więc bez grubości (a jak można zobaczyć coś, co nie ma grubości?). Można jednak go sobie wyobrazić, a nawet narysować – wykonać jego obraz. A Widzieć (celowo przez DUŻE „W”), to już naprawdę więcej niż połowa sukcesu!

Ad 4. – zły belfer

Jeśli kiedykolwiek w swej edukacji matematycznej trafiłeś na złego belfra – to Ci współczuję. Do matematyki nie może być dobry, czy nawet bardzo dobry belfer. On MUSI BYĆ WYŚMIENITY! Jeśli ma Cię nauczyć myśleć w operowaniu na czymś czego w życiu nie widziałeś na oczy (i nigdy nie zobaczysz!) i jeszcze wskazać pożytki płynące z takich operacji, to aby Cię nie zniechęcić do matmy, ON po prostu MUSI BYĆ WYŚMIENITY! A wyśmienity belfer – to taki, który:

- jest wyśmienitym teoretykiem – zna się na wykładanej przez siebie dziedzinie wiedzy,
- jest wyśmienitym dydaktykiem / metodykiem – umie Ci przekazać tę swoją wiedzę w zrozumiały DLA CIEBIE sposób,
- jest wyśmienitym pedagogiem – ma właściwy stosunek DO CIEBIE, poprzez co i ty możesz mieć właściwy stosunek do niego i (co za tym idzie) do wykładanego przez niego przedmiotu (bo to się tak właśnie przekłada),
- a do tego jeszcze jest pasjonatem (to chyba w tym wszystkim jest najważniejsze), bo tylko pasjonaci są w stanie nauczyć matematyki (wszak „tylko ten co ‘płonie’ jest w stanie ‘zapalać’ innych”).

AD 5. i 6. – lapsusy i roztargnienie

Lapsus – jest to najczęstszy typ błędów! Lapsus jest to bowiem błąd przez nieuwagę (a wiadomo, że trudno jest skupić uwagę na czymś tak abstrakcyjnym, jak matematyka). Lapsus, to tzw. „głupi błąd” – ot, chociażby 2 + 3 = 6. Tak napisałeś i pisząc to byłeś „święcie” o tym przekonany. Jednak gdy otrzymałeś z powrotem klasówkę – zapewne chwyciłeś się za głowę i zapytałeś się sam siebie: jak to możliwe? Jak JA mogłem popełnić taki głupi błąd?! Przecież to niemożliwe! A jednak...

A więc jak to możliwe? Skoro głupi błąd (jakim jest lapsus) jest błędem popełnionym przez nieuwagę – zatem aby się go wystrzec musisz po prostu więcej uważać jak coś robisz. Nie iść na skróty, nie robić za jednym razem kilku kroków (bo nie jesteś w stanie tak się skupić – szczególnie będąc zdenerwowanym pisaniem klasówki – by nie popełnić w pamięci błędu rachunkowego), nie robić czegokolwiek mechanicznie na pamięć (wystarczy że w trójkącie prostokątnym o bokach długości a, b i c, przeciwprostokątny był bok o długości b, a już $a^2 + b^2$ wcale nie będzie równe c^2!).

Ad 7. – zniechęcenie

Jeśli aż tyle pułapek na Ciebie czyha – nic dziwnego że często błądzisz na gruncie matematyki. To z kolei doprowadza cię do zniechęcenia i wypowiadasz (sam przed sobą głupio się tłumacząc) następujące myśli:

- po co mi matma? – do niczego mi się w życiu nie przyda! (nie muszę się więc jej uczyć, a jeśli muszę ją umieć, to tylko tyle, by móc przejść do następnej klasy),
- jestem cienias z matmy i trudno. Nie jestem się w stanie jej nauczyć, więc niech nikt mi nie mówi, że jest inaczej,
- nawet próbujesz zaprzęgnąć do swej teorii znanych matematyków: „Pitagoras twierdzi że matema śmierdzi, a Tales dowodzi że to nic nie szkodzi” ;)

Jesteś więc w zaklętym kręgu własnej niemocy, którym jeszcze bardziej się obmurowujesz! Bez sensu...

O tym, że moje powyższe wnioski są jak najbardziej słuszne, świadczy m.in. poniższy tekst. Otóż w cytowanym już wcześniej artykule *Matura bez obowiązkowej matematyki? NIK: szkoła zarzyna pasję, a nie uczy* (zamieszczonym na https://tvn24.pl/lodz/matematyka-nie-bedzie-obowiazkowa-na-maturze-nik-zglasza-taki-postulat-ra910848-2293613, autor: bż/gp) czytamy również m.in.:

> *Połowa przedszkolaków fascynuje się matematyką. Potem – w szkole – uczą się jej nienawidzić. Tyle wynika z najnowszego raportu NIK, (...) przynajmniej na razie – nie umiemy jej uczyć. (...)*
>
> *Matematykę, na etapie przedszkolnym, lubi co drugie dziecko. Co czwarte – jak wynika z opinii prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej z Akademii Pedagogiki Specjalnej – jest wyjątkowo uzdolnione do nauki „królowej nauk".*
>
> *Co dzieje się potem, w szkole? Stopniowe zarzynanie pasji i uzdolnień.*
>
> *– Po kilku latach edukacji tylko dwoje, troje starszych uczniów w klasie wykazuje się uzdolnieniami matematycznymi – twierdzi prof. Gruszczyk-Kolczyńska cytowana przez NIK.*
>
> *Izba podkreśla, że z matmą jest u nas coraz gorzej. Wyniki testów PISA wskazują, że w 2012 roku przeciętny uczeń radził sobie lepiej niż jego rówieśnik w 2015 roku. (...)*
>
> *Zdaniem Izby, za marnotrawienie talentów młodych Polaków odpowiada szkoła. A raczej fakt, co z uczniem dzieje się już w pierwszych trzech klasach, gdzie realizowane jest nauczanie początkowe.*
>
> *W jego trakcie – jak twierdzi cytowana w raporcie prof. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska – nauczyciele skracają czas poświęcony matematyce na rzecz innych zajęć.*
>
> *– Skracany jest czas przeznaczony na kształtowanie zapisów pojęć i umiejętności matematycznych – twierdzi prof. Gruszczyk-Kolczyńska.*

Do czwartej klasy uczeń wchodzi już ze znacznymi brakami. I pojęciami nauczonymi po łebkach. Okazuje się, że nie jest przygotowany do mierzenia się z tym, co przewiduje dla niego program nauczania.

– Narastające zaległości zastępują początkową fascynację dziecka szkołą i stopniowo przeradzają się w niezadowolenie, rozczarowanie, frustrację – twierdzi prof. Małgorzata Makiewicz z Zakładu Dydaktyki Matematyki na Uniwersytecie Szczecińskim. (...)

Później nie jest lepiej. Nauczyciele realizują program tak, żeby się wyrobić w zadanym czasie. Tyle że po drodze tracą to, co najważniejsze – czyli zrozumienie u swoich uczniów.

Aż 57 proc. dzieci przepytanych przez NIK żaliło się, że tempo pracy na lekcji jest nieodpowiednie. A swoją drogą, sam sposób prowadzenia zajęć jest – zdaniem NIK – mocno kontrowersyjny.

3. Praktyczne metody poradzenia sobie z matematyką, czyli remedium

Aby – że tak to ujmę – poradzić sobie z matematyką, wystarczy po prostu zaradzić podanym w poprzednim paragrafie powodom ich powstania. Uważam, że jest to prosta, podana „w żołnierskich słowach" odpowiedź na postawione w tym paragrafie zagadnienie.

To jednak nie jest wszystko. Nie wystarczy bowiem dawać rad „rozumowi" – potrzebne są i „sercu". To właśnie uczynię poniżej.

Najpierw napiszę Ci **dlaczego matematyka jest nauką prostą, łatwą i przyjemną**:

- nie trzeba się dużo uczyć (wystarczy się jej dobrze uczyć!),
- niezbędnej wiedzy jest niewiele,
- wystarczy się ćwiczyć w umiejętnościach (matematycznych),
- wtedy wystarczy myśleć.

Przyznajesz, że rozumowanie jest jak najbardziej logiczne, lecz twierdzisz zapewne że zasadza się na błędnych przesłankach: *jak to bowiem możliwe, aby matematyka była prosta, jeśli ja – przeciętnie zdolny – najnormalniej w świecie sobie z nią nie radzę?!* – Może po prostu przykładasz do niej nie tę miarę? Myślisz że jest trudna i TYLKO DLATEGO jest ona dla Ciebie trudna. „Nie oswoiłeś jej". Pora więc to zmienić. Zmień swe nastawienie. Tylko jak?

Po prostu trzeba się przełamać. Pomyśl, że wcale nie jest ona taka trudna, jak Ci się to dotychczas wydawało. Niech zawładnie Tobą chęć przezwyciężenia trudności. Pracuj systematycznie i wytrwale. Spróbuj zobaczyć w matematyce coś ciekawego (na dobry początek). Rozkoszuj się tym – sam i w towarzystwie chwaląc się przed najbliższymi:

- że dotychczas matematyka była dla Ciebie zmorą, a Ty właśnie zauważyłeś w niej coś ciekawego i to Cię wciągnęło,
- że myślisz, że jeszcze jest wiele przed Tobą do odkrycia na gruncie matematyki i że sądzisz, że niebawem zdobędziesz nowe jej „lądy".

Zobaczysz, że Twoi bliscy na pewno będą trzymać z Tobą w Twej drodze do pełnego opanowania matematyki. Będą Cię nawet uważać za geniusza, bo:

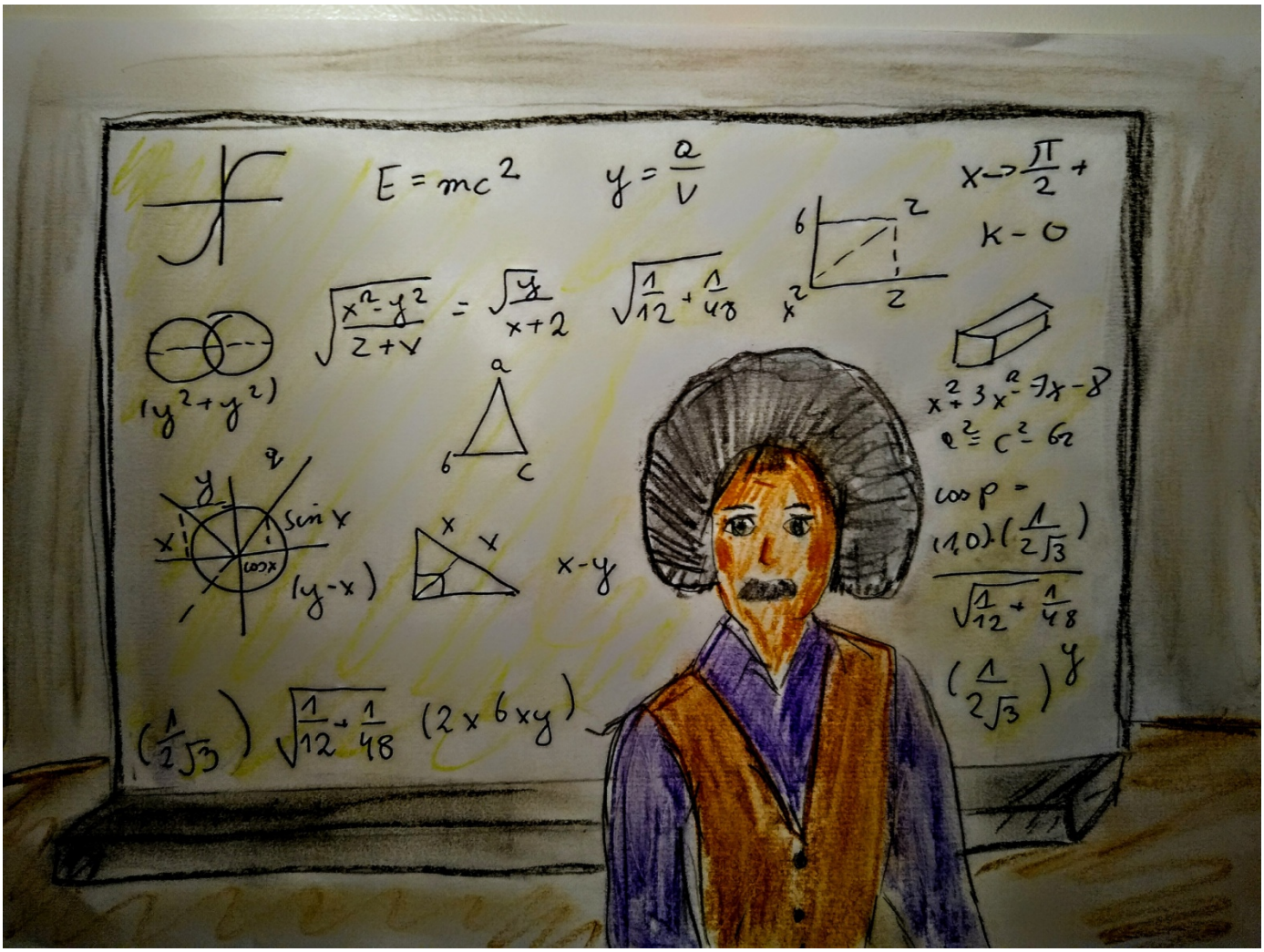
- sami o matematyce będą nadal myśleć tak jak Ty myślałeś o niej dotychczas,
- o Tobie będą mieć jeszcze większe mniemanie jako o tym, który pokonał szeroką i głęboką przepaść.

Powodzenia!

II. PODSTAWY MATEMATYKI

1. Principia, czyli logiczne podstawy matematyki

Pytasz: *Po co logika?, przecież umiem myśleć logicznie!* To prawda – każdy mumie myśleć, tylko – w takim razie – dlaczego każdy myśli inaczej: dlaczego jedni myślą, że istnieje Bóg, a inni – że nie; dlaczego podczas wyborów jedni wybierają jedne ugrupowania, a inni – drugie; dlaczego jedni twierdzą, że 2+2=4, a inni – że 5; …
Powiem Ci uczciwie – bo tak wierzą, bo takie mają przekonania, bo się mylą, …
W logice – odpowiednio – nie ważna jest wiara, przekonania, czy że ktoś tak (błędnie) myśli. Tu ważne jest poprawne myślenie. A po to, aby rzeczywiście było ono poprawne – zostało sformalizowane.



Przejdźmy więc do logiki!
Zdaniem w sensie logicznym nazywamy takie zdanie języka naturalnego, o którym możemy orzec, czy jest prawdziwe czy też nie (tj. – w tym przypadku – że jest fałszywe). Tego typu zdaniami mogą być tyko zdania orzekające (a więc zdania twierdzące i przeczące). Zdaniami tego typu nie są pytania, czy polecania.
Zwykle jesteśmy w stanie orzec, czy jakieś zdanie proste języka naturalnego jest **prawdziwe** czy też nie. Bardziej złożona sprawa jest ze zdaniami złożonymi. – tu właśnie wchodzi ów formalizm.
W jego ramach:
1) zdania proste będziemy oznaczać symbolami: p, q, r, … – są to tzw. zmienne zdaniowe,
2) każde z tych zdań może być prawdziwe – wtedy przyjmie wartość logiczną 1, lub fałszywe – wtedy będzie miało wartość logiczną 0.

Z danych zdań możemy tworzyć nowe zdania za pomocą słów czy zwrotów:

LP	Użyte słowa / zwroty	Postać zdania	Jego zapis formalny	Jego nazwa	Użyty spójnik logiczny	
					Jego postać	Jego nazwa
1	i	p i q	$p \wedge q$	koniunkcja	$\wedge$	spójnik logiczny koniunkcji
2	lub	p lub q	$p \vee q$	alternatywa	$\vee$	spójnik logiczny alternatywy
3	jeśli …, to	Jeśli p to q	$p \rightarrow q$	implikacja	$\rightarrow$	spójnik logiczny implikacji
4	wtedy i tylko wtedy gdy	p wtedy i tylko wtedy gdy q	$p \leftrightarrow q$	równo–ważność	$\leftrightarrow$	spójnik logiczny równoważności
5	nie	nie p	$\sim p$	negacja	$\sim$	spójnik logiczny negacji

Pierwsze 4 spójniki są dwuargumentowe – pozwalają utworzyć z dwu zdań nowe zdanie, a piąty (negacji) – jest jednoargumentowy, tzn. pozwala z jednego zdania utworzyć jedno zdanie.

W ten sposób możemy tworzyć zdania jeszcze bardziej złożone, np. postaci: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

Aby móc orzec jaką mają wartość logiczną („prawda” czy „fałsz”) – najpierw musimy wiedzieć jaką wartość logiczną mają zdania poszczególnych pięciu kategorii z powyższej tabeli, w zależności od tego jaka jest wartość logiczna zdań p i q. W związku z tym poniżej rozpatrzymy je po kolei.

NEGACJA – zdanie tworzone za pomocą <u>jednoargumentowego</u> spójnika logicznego negacji

Zaprzeczeniem, czyli negacją, zdania p jest zdanie *nieprawda, że p*, co zapisujemy $\sim p$. Zdanie $\sim p$ nazywamy negacją zdania p. Negacja zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym, a negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym. W skrócie ujmuje to poniższa tabela:

p	$\sim p$	
1	0	– negacją prawdy jest fałsz
0	1	– negacją fałszu jest prawda

Prawa logiki związane z negacją:

1. <u>Z dwóch zdań p i $\sim p$ jedno musi być fałszywe</u>. Jest to **prawo sprzeczności**. Jego symboliczny zapis: $\sim(p \wedge \sim p)$ – oznacza on, że nie może być tak, by równocześnie zaszły zdania p i $\sim p$, co jest właśnie równoważne pierwszemu (podkreślonemu) zdaniu z tego punktu
2. <u>Z dwóch zdań p i $\sim p$ jedno musi być prawdziwe</u>. Jest to **prawo wyłączonego środka**. Jego symboliczny zapis: $p \vee \sim p$.

Z tych praw wynika, że: z dwóch zdań p i $\sim p$ zawsze jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe.

Zdanie $\sim(\sim p)$ ma tę samą wartość logiczną co zdanie p. Jest to **prawo podwójnego przeczenia** (czy równoważnie: **podwójnej negacji**). Jego symboliczny zapis: $\sim(\sim p) \rightarrow p$. Przykład zastosowania tego prawa: *Nieprawda, że nie zjem* oznacza, że zjem.

UWAGA! Gdy matematyk używa określenia „**wtedy i tylko wtedy gdy**” – znaczy to: „w tych wszystkich sytuacjach i w żadnej innej”. Zwrotu tego będziemy używać chociażby przy omawianiu czterech kolejnych rodzajów logicznych zdań złożonych.

Zdania tworzone za pomocą dwuargumentowych spójników logicznych:

ALTERNATYWA

Zdanie $p \vee q$ nazywamy alternatywą p i q, a zdania p, q nazywamy składnikami tej alternatywy. Alternatywa jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jeden jej składnik jest prawdziwy. Równoważnie można powiedzieć: Alternatywa jest fałszywa wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jej składniki są fałszywe. Sytuację tę przedstawia poniższa tabela:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zachodzi następujące **prawo przemienności alternatywy**: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

KONIUNKCJA

Zdanie $p \wedge q$ nazywamy koniunkcją (lub iloczynem logicznym) zdań p i q, a zdania p i q czynnikami tej koniunkcji. Koniunkcja $p \wedge q$ jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy gdy obydwa jej czynniki są zdaniami prawdziwymi. Równoważnie można powiedzieć, że koniunkcja jest fałszywa wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jeden z czynników jest zdaniem fałszywym. Sytuację tę przedstawia poniższa tabela:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Zachodzi następujące **prawo przemienności koniunkcji**: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

IMPLIKACJA

Zdanie złożone, które otrzymujemy po połączeniu dwóch zdań słowami: *jeśli ..., to ...*, nazywamy implikacją i zapisujemy symbolicznie $p \rightarrow q$. Zdanie p to poprzednik implikacji, a zdanie q to jej następnik.

W języku potocznym zdanie *jeżeli p, to q* rozumiemy w ten sposób, że q daje się wywnioskować z p. W sensie matematycznym implikacja $p \rightarrow q$, której poprzedni p i następnik q są zdaniami fałszywymi jest uznawana za prawdziwą. Implikacja $p \rightarrow q$, której zarówno poprzednik p jaki i następnik q są zdaniami prawdziwymi, jest zdaniem prawdziwym. Zdaniem prawdziwym jest też implikacja o poprzedniku fałszywym i następniku prawdziwym. Jedynie przypadek, w którym poprzednik implikacji jest zdaniem prawdziwym, a następnik zdaniem fałszywym prowadzi nas do zdania fałszywego. Łącznie sytuacje te przedstawia poniższa tabela:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja $p \rightarrow q$ jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik (p) jest prawdziwy, a następnik (q) jest fałszywy. Równoważnie możemy powiedzieć, że tylko w pozostałych przypadkach implikacje jest prawdziwa.

Prawa związane z implikacją:

$p \to p$	**Prawo tożsamości** – z dowolnego zdania wynika ono samo
$(p \to \sim p) \to \sim p$	**Pierwsze prawo redukcji do absurdu** – jeśli z jakiegoś zdania można wyprowadzić jego negację, to znaczy, że jest ono fałszywe
$((p \to q) \wedge (p \to \sim q)) \to \sim p$	**Drugie prawo redukcji do absurdu** – jeśli z jakiegoś zdania można wyprowadzić dwa zdania wzajemnie sprzeczne, to znaczy, że to zdanie jest fałszywe
$((p \to q) \wedge p) \to q$	***Modus ponendo ponens*** (z łaciny: sposób przez potwierdzenie potwierdzający) – z zachodzenia implikacji i jej poprzednika otrzymujemy zachodzenie jej następnika (jest to jeden z najczęściej stosowanych sposobów wnioskowania); przykład użycia: *Jeśli dzisiaj jest poniedziałek, to jutro będzie wtorek; a dzisiaj jest poniedziałek; zatem jutro będzie wtorek.*
$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$	***Modus tollendo tollens*** (z łaciny: sposób przez zaprzeczenie zaprzeczający) – z zachodzenia implikacji i niezachodzenia jej następnika wnioskujemy niezachodzenie jej poprzednika; przykład użycia: *jeśli pada deszcz, to robi się mokro; ale nie robi się mokro; zatem nie pada deszcz.*
$((p \vee q) \wedge \sim p) \to q$	***Modus tollendo ponens*** (z łaciny: sposób przez zaprzeczenie potwierdzający) – jeśli z dwu zdań co najmniej jedno jest prawdziwe, a wiemy że pierwsze z nich jest fałszywe – to wtedy drugie musi być prawdziwe; przykład użycia: *mam cukierka w prawej lub w lewej ręce, ale w prawej ręce go nie mam – zatem mam go w lewej ręce*
$((\sim p \vee \sim q) \wedge p) \to \sim q$	***Modus ponendo tollens*** (z łaciny: sposób przez potwierdzenie zaprzeczający) – jeśli co najmniej jedno z dwóch zdań nie zachodzi, ale pierwsze z nich jednak zachodzi – to wtedy to drugie musi nie zachodzić; przykład użycia: *nie mam samochodu czerwonego albo zielonego, ale czerwony mam – zatem nie mam zielonego*
$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r))$	**Koniunkcyjny sylogizm hipotetyczny** – jest to swoiste prawo przechodniości, które mówi, że: jeśli z pierwszego zdania można wyprowadzić drugie, a z tego drugiego trzecie – to w konsekwencji można powiedzieć, że z tego pierwszego zdania można wyprowadzić owe trzecie; przykład użycia: *jeśli dużo pracuję, to jestem zmęczony; gdy jestem zmęczony, to nie chce mi się jeść; zatem gdy dużo pracuję, to nie chce mi się jeść.*

RÓWNOWAŻNOŚĆ

Zdanie postaci: *p wtedy i tylko wtedy, gdy q* nazywamy równoważnością i symbolicznie zapisujemy: $p \leftrightarrow q$. Zdania p i q nazywamy jej *członami*. Równoważność $p \leftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej człony mają tę samą wartość logiczną, a więc gdy są jednocześnie zdaniami prawdziwymi lub jednocześnie fałszywymi. Równoważnie możemy powiedzieć, że równoważność jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy jej człony mają różną wartość logiczną (a więc jeden z nich jest zdaniami prawdziwym, a drugi fałszywym). Sytuację tę przedstawia poniższa tabela:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Prawa związane z równoważnością:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	**Prawo transpozycji prostej** – implikacja jest równoważna implikacji w drugą stronę ale z zanegowanymi stronami; przykład użycia: *zdanie 'jeśli jest włączony wentylator, to jest mi przyjemnie' jest równoważne zdaniu 'jeśli nie jest mi przyjemnie, to na pewno nie jest włączony wentylator'* (bo w przeciwnym razie byłoby mi przyjemnie!)
$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	**Prawo de Morgana dla koniunkcji** – negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie negacji; przykład użycia: *stwierdzenie 'nie jest prawdą, jakobym miał zarówno długopis jak i ołówek' jest równoważne stwierdzeniu 'nie mam ołówka lub nie mam długopisu'*
$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	**Prawo de Morgana dla alternatywy** – negacja alternatywy jest koniunkcją negacji; przykład użycia: *sprzedawczyni w sklepie na moje pytanie 'czy jest masło lub margaryna?', odpowiedziała mi: 'nie, to znaczy nie mamy ani masła, ani margaryny!'*
$\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$	**Prawo zaprzeczenia implikacji** – negacja implikacji jest koniunkcją jej poprzednika i negacji jej następnika; przykład użycia: *trener skłamał mówiąc zawodnikom, że jeśli wygrają mecz, to zabierze ich na wycieczkę: wygrali mecz, a mimo to nie zabrał ich na obiecaną wycieczkę!*
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$	**Pierwsze prawo zastępowania implikacji** – implikacja jest równoważna negacji koniunkcji jej poprzednika i negacji jej następnika; przykład użycia: *trener obiecał zawodnikom, że jeśli wygrają mecz, to zabierze ich na wycieczkę. Oznacza to, że nie może być tak, by wygrali oni mecz, a on nie zabrał ich na tę wycieczkę!*
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$	**Drugie prawo zastępowania implikacji** – implikacja jest równoważna alternatywie negacji jej poprzednika i jej następnika; przykład użycia: *stwierdzenie 'jeśli zjem obiad, to będę najedzony' jest równoważne stwierdzeniu 'nie zjem obiadu lub będę najedzony'*
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	**Prawo zastępowania równoważności** – równoważność jest równoważna zachodzeniu implikacji w obydwie jej strony; przykład użycia: *stwierdzeni, że „kwadrat to prostokąt o równych bokach" – to to samo co powiedzieć, że 'kwadrat jest prostokątem o równych bokach' i równocześnie, że 'prostokąt o równych bokach jest kwadratem'*

Na zakończenie podam tu, jaka jest kolejność wykonywania działań logicznych: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
Tak więc np. formułę $p \rightarrow \sim q \vee r \leftrightarrow q \wedge \sim p$ rozumiemy w następujący sposób: $[p \rightarrow ((\sim q) \vee r)] \leftrightarrow (q \wedge (\sim p))$.
Jak byśmy chcieli nadać jej inne znaczenie – powinniśmy użyć nawiasów, np. w następujący sposób:
$p \rightarrow (\sim q \vee r \leftrightarrow q \wedge \sim p)$.

2. Parametryzacja obiektów (czyli ich opis za pomocą przysługujących im własności)

Za pomocą parametrów opisuje się obiekty (pojęcie „parametr" w matematyce ma też inne znaczenie – zapoznam Cię z nim w 1. paragrafie VI rozdziału). Na przykład chcąc kupić nowy telefon zwracasz uwagę na jego parametry: wielkość i rozdzielczość ekranu, dostępne pamięci (operacyjną i na pliki), liczbę i jakość aparatów, posiadane czujniki, dostępność różnych funkcji, … A co będzie, jak kilka telefonów będzie spełniać wszystkie Twoje wymagania? – Wówczas będziesz zwracać uwagę na inne, wcześniej nie brane pod uwagę parametry (np. cenę, jasność ekranu, markę) – i tak długo będziesz je dobierać, dopóki nie zostanie Ci jeden – najlepszy dla ciebie – model.
W ten właśnie sposób rozróżniamy między sobą obiekty – za pomocą przysługujących im własności. Oczywiście tych własności musi być wystarczająco dużo, by żadne *2* obiekty nie były tak samo opisane (czyli były nierozróżnialne).
Przeważnie jednak w ten sposób nie definiujemy KONKRETNEGO obiektu, lecz pewną klasę obiektów. Tak było właśnie w wyżej opisanym przypadku telefonu – wybrałeś konkretny MODEL telefonu (a kupiłeś 1 egzemplarz tego właśnie modelu). Tak jest i w przypadku takich pojęć (kategorii) jak np. drzewo, sosna, czy trójkąt. Dobór takich własności, w miarę możliwości prostych i w jak najmniejszej liczbie, nazywamy definicją.
Tak np. trójkąt – to „wielokąt o 3 bokach". – Zobacz jak banalnie prosto matematyka definiuje oboekty!

3. Pojęcia (definicje), prawa (twierdzenia), prawidła (wzory, zasady, metody) i przepisy postępowania (algorytmy i procedury)

Gdy chodziłeś do szkoły, to to, co należało się „wykuć" z matematyki, nazywało się „regułka".

Pod określeniem tym kryły się:

1. tak **definicje** – w matematyce zdania wprowadzające dane pojęcie (poza matematyką – również określające co dane pojęcie znaczy – np. w słowniku języka polskiego),
2. jak i **twierdzenia** – zdania ustalające zależności między poszczególnymi obiektami,
3. czy też:
   - **wzory** – symboliczne określenia zależności między zmiennymi,
   - **zasady** – ogólne sposoby prawidłowego postępowania,
   - **metody** – sposoby postępowania celem osiągnięcia zamierzonego celu.

Poniżej po kolei szerzej Ci je omówię.

Ad 1

Nawiązując do ostatniego akapitu z poprzedniego paragrafu, pomyślmy najpierw czym są **definicje**. Otóż są to określenia albo wprowadzające jakieś pojęcia (tak robią naukowcy) albo skrótowo opisujące już funkcjonujące pojęcia (tak czyni matka wyjaśniająca dziecku znaczenie słów, ale i takie określenia znajdziesz też w słowniku języka polskiego – z tym podejściem miałeś do czynienia w szkole).

Definicje budowane są zwykle według schematu: *X* jest to *Y* (np.: „trójkąt jest to wielokąt o 3 bokach"). Zauważ, że taka definicja jest niesamowicie prosta i jednoznaczna (taka zresztą jest też matematyka, a sam w stu procentach przekonasz się o tym po przeczytaniu tej książki).

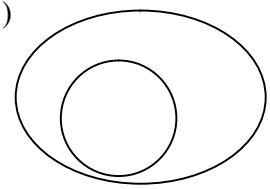
Co oznacza, że przytoczona powyżej definicja jest jednoznaczna? – W oparciu o nią zawsze możemy powiedzieć, czy dany (przedstawiony nam obiekt) jest trójkątem, czy też nie.

W definicji takiej, jej człon Y nazywamy *definiens* (= człon definiujący, z łaciny), a człon X – *definiendum* (= człon definiowany, również z łaciny).

Dobrze (tj. poprawnie) zbudowana definicja musi być ADEKWATNA, tj. zakres pojęciowy *definiendum* musi pokrywać się z zakresem pojęciowym *definiens*.

Mogą zdarzyć się następujące sytuacje:

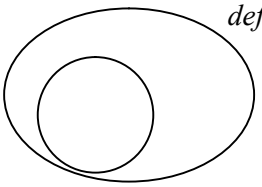
1) *definiens*



definiendum

definicja za szeroka

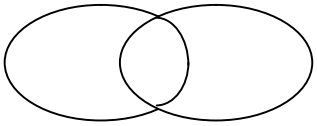
2) *definiendum*



definiens

definicja za wąska

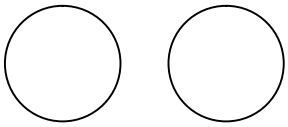
3)



definiens *definiendum*

definicja częściowo adekwatna

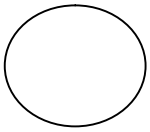
4)



definiens *definiendum*

definicja nieadekwatna

5)



definiens = definiendum

definicja adekwatna (poprawna)

Przykłady definicji trójkąta:

1) trójkąt – to dowolny wielokąt o nie więcej niż *4* bokach (za szeroka – bo oprócz trójkątów obejmuje też czworokąty);
2) trójkąt – to dowolny wielokąt o trzech bokach równej długości (za wąska, bo obejmuje tylko trójkąty równoboczne, pomijając pozostałe);
3) trójkąt – to dowolny wielokąt o równych bokach – z jednej strony za wąska (z trójkątów obejmuje jedynie równoboczne), a z drugiej za szeroka (poza trójkątami są tam i inne wielokąty o równych bokach), a więc częściowo adekwatna;
4) trójkąt – to dowolny czworokąt (te dwa pojęcia kompletnie się rozchodzą) – nieadekwatna;
5) trójkąt – to wielokąt o 3 bokach – adekwatna.

Tylko sytuacja 5. jest poprawna. Spośród sytuacji niepoprawnych (1. – 4.) najczęściej występują sytuacje 1. – 3.

ZADANIA:

1) Spróbuj poprawnie zdefiniować kilka przedmiotów z Twego otoczenia: ząb, krzesło, stół, dom, szklankę.
2) Spróbuj podać po 1 przykładzie takich „definicji”, aby pasowały one do każdej z podanych wyżej sytuacji 1. – 5.

W praktyce, oprócz definicji zbudowanych w oparciu o zestaw cech, mamy jeszcze definicje przez wskazanie (co to jest słońce? – o, zobacz – to!) oraz przez wymienienie (co to są sztućce? – noże, widelce, łyżki i łyżeczki).
Nadmieńmy jeszcze, że definicje tworzone według cech, zwykle zbudowane są poprzez podanie kategorii nadrzędnej, a następnie jej zawężenie poprzez jedną czy więcej cech. W przypadku przytoczonej powyżej definicji trójkąta – kategorią nadrzędną było „bycie wielokątem”, a cechą ograniczającą – „posiadanie 3 boków”.

Ad 2

Twierdzenia określają zależności. Występują one w postaci:

- najczęściej – implikacyjnej: Jeśli jest *X*, to jest *Y* (albo: każde *X* jest *Y*);
- rzadziej – równoważnościowej: Coś jest *X* wtedy i tylko wtedy gdy jest *Y*;
- najrzadziej – wielo-równoważnościowej: Niech będzie *X*. Wtedy następujące warunki są sobie równoważne: *A*, *B* i *C*.

Twierdzenia występujące w postaci **implikacji** mają postać: „Jeśli warunek, to teza”.
Jest tak np. w przypadku twierdzenia Pitagorasa:
Jeśli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.
Mamy też tzw. odwrotne twierdzenie Pitagorasa, ustanawiające zależność w drugą stronę (nie jest tak w przypadku wszystkich twierdzeń, ale tu akurat tak jest):

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch krótszych boków w trójkącie jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.
W sumie mamy więc **równoważność** występujących tu warunku i tezy:
Trójkąt jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy suma kwadratów długości dwóch jego krótszych boków jest równa kwadratowi długości jego najdłuższego boku.

Kryterium – to takie twierdzenie, które będąc w postaci równoważności z powodzeniem mogłoby być definicją jednego z pojęć o których się wypowiada, gdyby wcześniej nie została przyjęta już klasyczna definicja tego pojęcia (kryterium to określałoby je równoważnie, czyli dokładnie w tym samym zakresie przedmiotowym). Przy okazji dopowiedzmy tu, że pod pojęciem „kryterium" kryją się też warunki do spełnienia jakiejś tezy (np. mamy kryteria zaliczenia przedmiotu na studiach).

W matematyce twierdzenia początkowe, to inaczej **pewniki** lub **aksjomaty**. Nie dowodzi się ich, lecz z góry przyjmuje się jako oczywiste, prawdziwe.
Wprowadzając nowe twierdzenia należy je udowodnić (by być pewnym, że są prawdziwe). Dopóki się tego nie zrobi – nazywa się je jedynie **hipotezami** (co znaczy, że się jedynie – z bardzo dużą dozą prawdopodobieństwa – przypuszcza się, że są one prawdziwe).

W przypadku twierdzeń, zobaczmy jeszcze co z nich wynika, jak i co z nich nie wynika (choć – niestety – wiele osób niesłusznie uważa, że to co wcale nie wynika, jednak wynika… ;)). Będziemy to rozpatrywać odwołując się do twierdzenia: *Każdy kwadrat jest prostokątem* lub inaczej (równoważnie): *jeśli coś jest kwadratem, to jest prostokątem*. Poniżej zobaczymy, co z niego wynika, a co nie wynika
Z twierdzenia typu „jeśli *A* to *B*" nie wynika „jeśli nie-*A* to nie-*B*". Odwołując się do naszego przykładu, stwierdzenie: „jeśli coś nie jest kwadratem, to nie jest prostokątem" – jest fałszywe, bo to coś może być prostokątem choćby o bokach długości *2* i *3*. Ktoś jednak powie „no tak, ale to coś co nie jest kwadratem może być choćby butelką, a butelka nie jest prostokątem". Zgodzę się z nim, jednak to wcale nie zadaje kłamu stwierdzeniu, że zdanie „jeśli coś nie jest kwadratem, to nie jest prostokątem" jest fałszywe. Zdanie to bowiem jest kategoryczne – mówi, że jeśli spełniony jest warunek, to MUSI być spełniona teza. Zawsze! A tutaj tak nie jest! (choćby w przypadku naszego prostokąta o bokach długości 2 i 3).
Z twierdzenia typu „jeśli *A* to *B*" wynika jednak (!) „jeśli nie-*B* to nie-*A*" (a więc implikacja w drugą stronę, ale z zanegowanymi stronami). Zdanie to nazywamy prawem transpozycji. Owszem, ze zdania „jeśli coś jest kwadratem, to jest prostokątem" wynika zdanie „jeśli coś nie jest prostokątem, to na pewno nie jest kwadratem" (bo kwadratami mogą być tylko prostokąty – jak orzeka nasze wyjściowe twierdzenie).
Z twierdzenia typu „jeśli *A* to *B*" nie wynika „jeśli *B* to *A*" (nieraz tak jest, że mamy „jeśli *A* to *B*" i „jeśli *B* to *A*" – np. w przypadku twierdzenia Pitagorasa, ale nie zawsze tak jest – dlatego właśnie nie mamy tu do czynienia z wynikaniem). Zauważ, że rzeczywiście, „jeśli coś jest kwadratem, to jest prostokątem" zachodzi, ale „jeśli coś jest prostokątem, to jest kwadratem" – już nie.

Ad 3
Wzór – to symboliczny zapis ukazujący zależność między różnymi wartościami (np. we wzorze na prędkość – między prędkością, drogą i czasem). We wzorze występują dwie lub większa liczba zmiennych reprezentujących te wartości. Przeważnie od razu taki wzór podaje jak obliczyć jedną z tych wartości (np. wzór na prędkość), jednak można go przekształcić, by można było obliczyć pozostałe występujące w nim wartości (tu: drogę i czas). O tym jak tego dokonać – podam w kolejnych rozdziałach tej książki.
Zasada (np. „zasada indukcji matematycznej"), **reguła** (np. „reguła odrywania") – to prawa, o których wyrażamy się w ten sposób, aby podkreślić, że zostały stworzone ze względu na ich przeznaczenie do wykorzystywania w działaniu praktycznym.
Metoda (np. metoda przeciwnych współczynników, czy metoda podstawiania) – to schematyczny sposób uporania się z jakimś zagadnieniem, zadaniem.

Oprócz wyżej opisanych, w matematyce stosuje się też – „zapożyczone" z informatyki – pewne przepisy postępowania, zwane algorytmami i procedurami. Czym są?

Algorytm – to jednoznacznie określony sposób postępowania podający w jaki sposób w oparciu o wejściowe dane krok-po-kroku dojść do oczekiwanego wyniku. Z kolei **procedura** – to spójna pod względem wykonywanego zadania część algorytmu (np. może być procedura wyznaczenia delty przy rozwiązywaniu równania kwadratowego).

4. Przypuszczenia jako podstawa rozwoju matematyki (i nie tylko)

Skąd wiemy, że coś jest lub że tego czegoś nie ma? Jest kilka odpowiedzi na to pytanie:
1) bo widzimy jak jest,
2) bo ktoś nam to powiedział (a my mu ufamy),
3) bo przeczytaliśmy gdzieś to (a darzymy zaufaniem autora tej publikacji),
4) bo na bazie posiadanej wiedzy możemy wywnioskować, że tak właśnie jest.

Bywa, że odnośnie jakiejś wiedzy której nie mamy, chcemy ją posiąść:
1) bo jest nam ona do czegoś potrzebna,
2) bo chcemy zaspokoić swoją ciekawość,
3) bo niewiele już trzeba byśmy ją mieli.

Wtedy zabiegamy o nią:
1) „zasięgamy języka”,
2) czytamy publikacje,
3) korzystamy ze środków masowego przekazu,
4) przeprowadzamy doświadczenia,
5) analizujemy to co już wiemy, by wyciągnąć nowe wnioski, a tym samym poszerzyć swoją wiedzę.

W matematyce poszczególni ludzie mogą korzystać z każdej z tych możliwości.

Jednak w przypadku wiedzy matematycznej nie osobniczej, lecz ogólnoludzkiej (!) – celem jej poszerzenia, konieczne jest stosowanie ostatniej z tych metod. Żeby jednak dojść do nowego okrycia, trzeba zwykle: mieć jasno wytyczony cel, mieć szeroki zasób wiedzy i umiejętności matematycznych, mieć bogatą wyobraźnię, umieć analizować fakty i wyciągać z nich stosowne wnioski (a gdy do realizacji tego celu okaże się, że jeszcze za mało wiemy czy umiemy – wcześniej zaradzić tym niedomaganiom), mieć pasję odkrywcy.

Matematyk jak chce coś udowodnić, to – najwyraźniej – jeszcze „nie wierzy” że to co chce udowodnić jest takim jakim on „chce” by takim było. On – jako matematyk – „uwierzy” w to dopiero wtedy gdy to udowodni (lub gdy ktoś inny go w tym uprzedzi). Póki co, to co chce on udowodnić, to jest jedynie jego przypuszczenie (że tak akurat jest).

Wyobraźnia matematyka manifestuje się w tym, że najpierw dochodzi on do tego przypuszczenia, mocno „wierzy” że jest oni prawdziwe, a następnie je dowodzi (co też wymaga niebywałej wyobraźni)!

Według mnie, wyobraźnią podobną do tej matematyka, dysponują: filozofowie, artyści, wynalazcy i odkrywcy.

III. POLICZMY SIĘ Z LICZBAMI

1. Przystawka, czyli danie na dobry początek – rozróżnienie między liczbą a cyfrą, i nie tylko…

Czym się różni liczba od cyfry? O tym już wiesz, bo pisałem o tym w 1. paragrafie I rozdziału: Cyfra to znak graficzny służący do zapisu liczby, który zarazem może reprezentować liczbę jednocyfrową. Cyfra – to „cegiełka" do tworzenia liczby. Ile takich „cegiełek" użyjemy – o tylu-cyfrowej liczbie mówimy. Tak np. 1.537 jest liczbą 4-cyfrową. Zauważ, że dodatkowo użyłem tu kropki. Nie jest ona konieczna, lecz warto ją stosować (zawsze co 3 miejsca od prawej strony), bo wtedy łatwiej jest taką liczbę przeczytać. O tym szerzej napiszę później (tu jest tylko wprowadzenie – taka „przystawka", czy „rozgrzewka"). Do zapisu liczby możemy też użyć minusa – wtedy będziemy mieli liczbę ujemną (przykład: -3). Liczby ułamkowe czy mieszane (te ostatnie mają część całkowitą i część ułamkową) zapisujemy za pomocą przecinka (np. 0,13 czy 17,27) lub kreski ułamkowej (np. $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$). W przypadku tej ostatniej liczby – można zapisać ją też tak: 3,(6), a więc jako liczbę okresową – z zastosowaniem nawiasu.

W zapisie wykładniczym używa się dodatkowo znaku mnożenia: $13{,}7 \cdot 10^{15}$ (o zastosowanej tu notacji wykładniczej również szerzej napiszę później). Liczbę można też zapisać przy pomocy symbolu (np. π – czyt. „pi"), pierwiastka (np. $\sqrt{2}$ - jest to konieczne, bo takiej liczby nie jesteśmy w stanie zapisać w całości za pomocą cyfr i kreski ułamkowej lub przecinka, bo ma nieskończenie wiele miejsc po przecinku i nie powtarzają się one okresowo) czy logarytmu (np. $\log 2$ - jest to konieczne, gdyż i tu takiej liczby nie jesteśmy zapisać w całości za pomocą cyfr i kreski ułamkowej lub przecinka, bo ma nieskończenie wiele miejsc po przecinku i też nie powtarzają się one okresowo).

Jak więc widzisz – „im dalej w las – tym ciemniej". Nie bój się jednak – ta książka jest swoistą „latarką", która rozświetli ci owe „mroki" matematyki (i dzięki temu przestaną już one być dla Ciebie „mrokami").

2. Przydatność liczb, czyli do czego służą liczby?

Wiemy już do czego służą cyfry. Obecnie zobaczymy do czego służą liczby. Jak sama ich nazwa wskazuje – do liczenia, czy (w matematyce:) obliczania. Ale nie tylko – również do numerowania, do nazywania (np. w jednym z filmów główny bohater nazywał swoje kolejne osły kolejnymi liczbami naturalnymi – miał np. osła którego nazywał "Numer *7*"; mamy też w szkole *14.* ucznia w dzienniku), do określania liczebności jakiegoś zbioru (na.: na biurku mam *3* książki) czy określenia jakiejś wielkości (wysokości, długości, szerokości, grubości, wagi, temperatury, ...), do odliczania (np. sekund do startu rakiety; czasu do wspólnego podniesienia jakiegoś ciężkiego przedmiotu: „No to na *3*: *1*, *2*, *3*!"; dni do cywila, ...), ...

3. Porównywanie liczb

Tutaj znowu popracujemy na bazie przykładów.
Załóżmy, że ty masz *20* lat, a ja *30*. Wówczas:

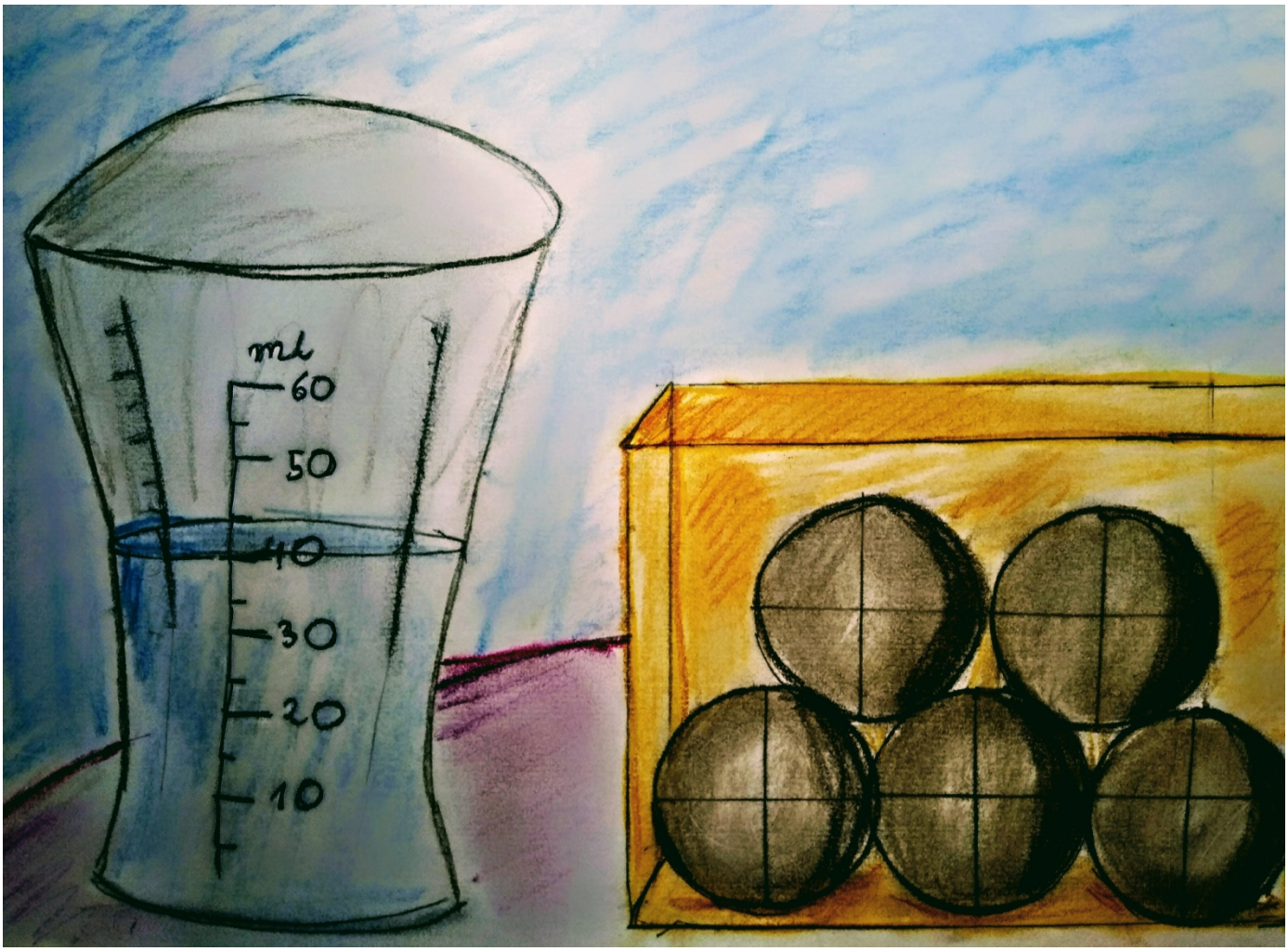
1) Ty jesteś ode mnie o *10* lat młodszy, a ja od Ciebie jestem o *10* lat starszy (sposób liczenia: *30 – 20 = 10*);
2) Ja jestem od Ciebie *1,5* razy starszy, a Ty ode mnie *1,5* razy młodszy (sposób liczenia: $\frac{30}{20} = 1{,}5$);
3) Ty jesteś ode mnie o $\frac{1}{3}$ młodszy (sposób liczenia: $\frac{30-20}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; sprawdzenie: $30 - \frac{1}{3} \cdot 30 = 30 - 10 = 20$), a ja od Ciebie o połowę starszy (sposób liczenia: $\frac{30-20}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$; sprawdzenie: $20 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 20 + 10 = 30$).
4) Ja jestem od Ciebie o *50* % starszy (sposób liczenia: $\frac{30-20}{20} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$), a Ty ode mnie jesteś o $33\frac{1}{3}$% młodszy (sposób liczenia: $\frac{30-20}{30} \cdot 100\% = \frac{1}{3} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$);
5) Twój wiek, to $\frac{2}{3}$ mojego wieku (sposób liczenia: $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$), a mój wiek, to $\frac{3}{2}$ Twojego wieku (sposób liczenia: $\frac{30}{20} = \frac{3}{2}$).

4. Policzalność – co to takiego?

Pierwsza rzecz: czy rozróżniasz pojęcia *liczba* i *ilość*?

Pojęcie „**liczba**” odnosi się do obiektów policzalnych, tj. takich które podajesz w sztukach. Mamy np. *8* długopisów, *6* krzeseł, *1* telewizor, *2* komputery – mamy je w takiej **liczbie**.

Z kolei pojęcie „**ilość**” odnosi się do obiektów niepoliczalnych – np. mleka czy mąki. Nie mamy jednego mleka, tylko jedną butelkę mleka, czy jeden litr mleka.



A co z pieniędzmi? Otóż pieniądze są i policzalne i niepoliczalne. Jak rozłoży się przed małym dzieckiem *5* monet i zapyta się je „ile tu jest pieniążków?” – to (o ile się nie pomyli) odpowie: pięć. My jednak wiemy, że *5* pieniążków *5*-złotowych, to co innego niż *5* pieniążków *1*-złotowych. Tak więc pieniądze w odbiorze dziecka (a więc rozumiane jako monety czy banknoty) są policzalne. Z kolei pieniądze rozumiane jako reprezentowana przez nie wartość są już niepoliczalne. Nie pytamy się więc „jaką masz liczbę pieniędzy?”, lecz – jeśli już, to – „jaką masz ilość pieniędzy?” (czy prościej: „ile masz pieniędzy?”). Pamiętaj jednak, że pytanie kogoś o jego pieniądze nie należy do grzecznych.

5. Przecinki, kropki, średniki i spacje stosowane przy zapisie liczb

Trudno jest „od ręki” przeczytać co to za liczba: 87499209317. Gdy jednak co 3 miejsca od prawej strony wstawimy krótkie spacje lub kropki – sprawa stania się od razu łatwa:

87 499 209 317 lub 87.499.209.317 – tu już od razu widać, że jest to: 87 miliardów 499 milionów 209 tysięcy 317.

W krajach anglosaskich standardowo stosuje się tu przecinki, a tam gdzie my stawiamy przecinek – stawia się kropkę. Tak więc według tejże/ichniej notacji: 4,634,523.75 – to 4 miliony 634 tysiące 523 i 75 setnych.

Dopowiem tu jeszcze, że po przecinku „rozdzieleń co trzy” już się nie stosuje:

- zapiszemy więc 2.524.736,37292 ,
- a nie 2.524.736,37.292 (przyznasz zresztą, że dziwnie to wygląda ;)).

Jak napiszesz 2,3,4 – to nie wiadomo:

- czy są to 3 liczby: 2, 3 i 4,
- czy dwie: 2,3 i 4,
- czy też dwie inne: 2 i 3,4

(a powiedzmy, że chodziło nam o tę środkową – wyróżnioną tu szarym tłem – sytuację).

Aby temu zaradzić – można:

- albo zwrócić uwagę na właściwe wykorzystanie spacji: 2,3, 4
- albo jeszcze zamienić przecinek rozgraniczający liczby średnikiem: 2,3; 4 (przyznasz, że teraz jest to najbardziej czytelny i jednoznaczny zapis).

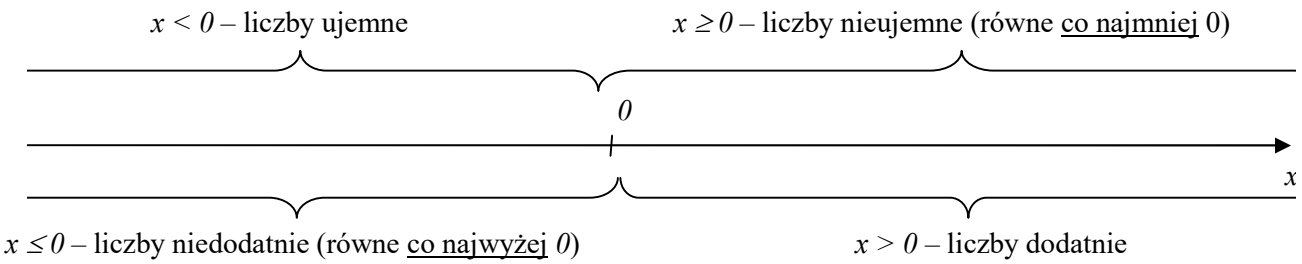
IV. PO OBU STRONACH MOCY, CZYLI CENTRALNA ROLA ZERA

1. Podziały zbioru liczb względem zera: liczby dodatnie i niedodatnie, ujemne i nieujemne

Ogólnie liczby (te o których uczy się w szkole – tzw. liczby rzeczywiste) dzielimy na *3* kategorie:

- **ujemne** (jest ich nieskończenie wiele),
- **zero** (jest tylko jedna taka liczba – po prostu zero!)
- i **dodatnie** (podobnie jak ujemnych jest ich nieskończenie wiele).

Te liczby, które nie są dodatnie (a więc zero i ujemne) nazywamy **niedodatnimi**, a te które nie są ujemne (a więc zero i dodatnie) nazywamy **nieujemnymi**. Wszystko to masz na poniższym zestawieniu (na osi liczbowej, która zresztą reprezentuje zbiór liczb rzeczywistych):



Mamy tu dwa matematyczne pojęcia:

- „**co najmniej**” ileś, co oznacza że tyle lub więcej (czyli na pewno nie mniej niż owe „ileś”)
- „**co najwyżej**” ileś, co oznacza że tyle lub mniej (czyli na pewno nie więcej niż owe „ileś”)

Mamy tu też *4* rodzaje nierówności: $<$, $\leq$, $>$ i $\geq$. (w matematyce mamy jeszcze jeden rodzaj nierówności: $\neq$, co czytamy: różne, nie jest równe).

2. Pochodne podziału liczb względem zera: liczby przeciwne i wartość bezwzględna

Liczby przeciwne, to – najprościej rzecz ujmując – liczby różniące się znakiem. Przykłady: *15* i *-15*, π i $-\pi$.

Z kolei formalnie rzecz biorąc, możemy powiedzieć, że **liczby przeciwne** to dwie liczby, których suma wynosi zero.

Tak więc – podaję definicję – **liczba przeciwna** do danej liczby to taka liczba, że zachodzi: $a + (-a) = 0$.

A co jest liczbą przeciwną do zera? Zauważ, że **zero** jest niedodatnie i nieujemne zarazem, a zatem dostawienie znaku plus lub minus przed zerem dalej jest równe **zero** (- 0 = 0). Otrzymujemy stąd, że **liczbą przeciwną do zera jest zero**. Wniosek ten otrzymujemy też wprost z (przytoczonej powyżej) definicji liczby przeciwnej: 0 + (-0) = 0 - 0 = 0. Wszystko się więc zgadza!

Inne ciekawe własności liczb przeciwnych:

- liczbą przeciwną do przeciwnej do x jest liczba x,
- liczba przeciwna do liczby dodatniej jest ujemna,
- liczba przeciwna do liczby ujemnej jest dodatnia.

Z pojęciem liczby przeciwnej związane jest pojęcie **wartości bezwzględnej liczby** (dla liczby x oznaczane przez $|x|$). **Wartością bezwzględną** dowolnej liczby x jest:

- ta sama liczba x, gdy $x \geq 0$ (przykład: $|5|=5$, $|0|=0$),
- liczba $-x$ (przeciwna do x), gdy $x<0$ (przykład: $|-5|=-(-5)=5$).

Tak więc wartość bezwzględna liczby nieujemnej (dodatniej i zera) nie rusza, a z ujemnej zdejmuje minus.

Bezpośrednio z definicji wartości bezwzględnej wynika, że $|x|$ jest zawsze liczbą **nieujemną**.

W interpretacji geometrycznej, wartość bezwzględna jest to odległość na osi liczbowej danej liczby od zera.

Gdzie w życiu codziennym wykorzystujemy wartość bezwzględną? Choćby mówiąc, że jest *8* stopni mrozu (gdy na dworze jest temperatura *-8* stopni Celsjusza), czy licząc różnicę wieku między dwiema osobami (gdy mamy osoby w wielu *3* i *8* lat – to różnicę ich wielu wyznaczamy licząc różnicę tych liczb, i gdy wyjdzie nam liczba ujemna – zamieniamy ją na liczbę jej przeciwną, czyli – właściwie – licząc wartość bezwzględna różnicy tych liczb).

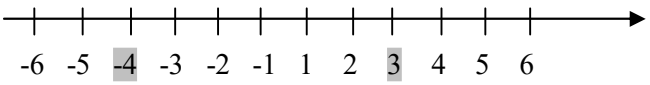
3. Przykład „osi liczbowej bez zera”

Normalnie po środku osi liczbowej[1] jest zero. Jest jednak jedna oś czasowa, która tego zera nie ma. Jest to oś czasu ukazująca lata (ewentualnie wieki) najpierw przed naszą erą (w skrócie: p.n.e.), a potem naszej ery (w skrócie n.e.)[2]. Mamy więc lata:

…, 5 p.n.e., 4 p.n.e., 3 p.n.e., 2 p.n.e., 1 p.n.e., 1 n.e., 2 n.e., 3 n.e., 4 n.e., 5 n.e., …

W przypadku lat naszej ery (powyżej dodatkowo podkreślonych), nie musimy pisać, że są naszej ery. Jeśli bowiem nie będą miały żadnej adnotacji, to przyjmuje się domyślnie, że są właśnie „naszej ery” (to zupełnie tak jak z liczbami dodatnimi: zamiast pisać *+5* pisze się po prostu *5*).

Dla celów rachunkowych, możemy tu wprowadzić analogiczne oznaczenie jak w przypadku liczb: lata naszej ery oznaczać z plusem (lub bez tego znaku), a lata przed naszą erą – z minusem. Wtedy oś liczbowa lat będzie wyglądać następująco:



[1] Jeśli tak w ogóle można powiedzieć, bo skoro oś jest (skierowaną) prostą – a więc jest nieskończona zarówno z lewej, jak i z prawej strony – to właściwie każdy jej punkt można by uznać za jej środek

[2] Do II wojny światowej włącznie, w Polsce mówiło się nie „przed naszą erą”, lecz „przed Chrystusem” (w skrócie: przed Ch.) i nie „naszej ery” tylko „po Chrystusie” (w skrócie: po Ch.). Miało to oczywiste odniesienie do faktu, że za owy punkt graniczny przyjęto czas narodzenia Chrystusa. Po II wojnie światowej, komuniści walczący z religią, wymienili „Chrystusa” na „naszą erę” i tak już zostało…

Druga – najważniejsza w tym paragrafie uwaga – odnosi się do faktu, że mamy tylko lata p.n.e. i lata n.e. Oznacza to, że **nie ma roku zerowego!** Konsekwencją tego jest pewne zawirowanie w rachunkach:

Zadanie 1: jaki rok był *6* lat przed *3* r.n.e.?
Normalnie liczylibyśmy to tak: $3 - 6 = -3$, czyli *3* rok p.n.e.
Jednak jak policzymy palcem, cofając się nim o 6 pozycji w lewo od *3* na osi liczbowej lat, to otrzymamy że był to *4* rok p.n.e. Mamy więc rok o *1* wcześniejszy niż z wcześniejszych (nietrafnych) obliczeń.
Należy więc tu liczyć według schematu: *rok p.n.e. = rok n.e. – różnica – 1*. (*)

Zadanie 2: Jeśli obecnie mamy *2020* rok, to jaki był *2050* lat temu?
$2020 - 2050 - 1 = -31$ – był to rok *31* p.n.e.

A jak to będzie w II stronę?
Czy zadziała tu przekształcony wzór (*), a więc wzór: *rok n.e. = rok p.n.e + różnica + 1* ? (**)
Sprawdźmy!

Zadanie 3: Weźmy *4* rok przed naszą erą. Który był rok *6* lat później?
Licząc palcem na naszej osi – otrzymujemy, że był to *3* rok n.e.
Z kolei stosując wzór (**) – otrzymujemy: $-4 + 6 + 1 = 3$, czyli też *3* rok n.e.
Jak więc widać, wzór (**) się sprawdza!

Jakie wnioski możemy wyciągnąć z tego paragrafu?:
1) Nie było i nie ma roku zerowego! Mamy lata tylko n.e. i p.n.e.
2) Lata n.e. traktujemy jak liczby dodatnie, a lata p.n.e. – jak liczby ujemne.
3) Musisz uważać obliczając lata i przechodząc przez granicę między n.e. a p.n.e.: idąc w lewo dodatkowo odjąć *1*, a idąc w prawo – dodatkowo dodać *1*.

Ogólnie, zawsze warto jest uważać, a szczególnie na terenie nieznanym czy innym niepewnym. Wtedy – w matematyce – warto jest zrobić obliczenia na małych danych, a następnie je uogólnić (tak zresztą tu zrobiliśmy – z obliczeń na małych liczbach, jak w przykładzie *1*, gdzie dodatkowo ustaliliśmy na jego bazie ogólna zasadę działania, przeszliśmy do obliczeń na dużych liczbach, stosując tę że zasadę). Z podobnym podejściem będziemy mieli w pewnym przykładzie, przy omawianiu odejmowania (zob. *1*. zadanie w paragrafie 1 w rozdziale VII).

V. POZOSTAŁE RODZAJE LICZB

1. Przegląd i omówienie rodzajów liczb

LICZBY WYMIERNE I NIEWYMIERNE

Część z omówionych wyżej liczb, to **liczby wymierne**, czyli takie, które możesz zapisać w postaci $\frac{liczba\ całkowita}{liczba\ całkowita}$ (oczywiście w mianowniku nie może być zero, bo – jak zapewne pamiętasz – nie można dzielić przez zero).

Są to więc:

1) wszystkie liczby całkowite (bo $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$),
2) w ten sposób zapisane ułamki zwykłe – te które (nie licząc znaku) licznik mają mniejszy niż mianownik ($\frac{-1}{3}$, $\frac{2}{5}$),
3) oraz ułamki niewłaściwe, czy (równoważne im) liczby mieszane ($\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$).

Jak się okazuje:

- niektóre z tych ułamków właściwych czy niewłaściwych (=liczb mieszanych) można zapisać ze skończoną liczbą (liczbą, a nie ilością – to już wiesz!) znaków po przecinku: $3\frac{2}{5} = 3{,}4$,
- a niektóre (tzw. okresowe) – już nie: $\frac{-1}{6} = -0{,}166666\ldots = -0{,}1(6)$.

Wszystkie pozostałe liczby z naszej osi liczbowej (a więc te, które nie są wymierne) – to liczby **niewymierne**. Są to **ułamki** lub **liczby mieszane** o nieskończonym zapisie po przecinku (w zapisie dziesiętnym); są to np.:

- $-\sqrt{2} \approx -1{,}4142135624\ldots$ (tu dalej jest nieskończenie wiele cyfr, jakby losowych, nie ma tu nigdzie okresu od pewnego miejsca po przecinku),
- $\pi \approx 3{,}14159\ldots$ – analogiczna sytuacja jak powyżej.

Jak mamy tak dużą (nieskończenie wiele!) liczbę cyfr po przecinku, to zrozumiałe, że nie jesteśmy w stanie ich wszystkich wypisać (nie starczyłoby nam czasu ani miejsca w – dowolnie jak grubym – zeszycie). Poza tym nie miało by to w ogóle sensu (na co dzień nie potrzebujemy nie-wiadomo-ile cyfr po przecinku).

Co więc robimy? – To co ja zrobiłem powyżej: zaokrąglamy je do określonej liczby miejsc po przecinku (zwykle do 2). Szerzej o tym powiem w kolejnym paragrafie.

Co ma Bóg do liczb?

Nie wiem czy wiesz co jest antonimem (słowem o przeciwnym znaczeniu) słowa „natura". Jest to bardzo trudna zagadka, a jej rozwiązaniem jest słowo „kultura". Kultura jest to bowiem to, co jest stworzone „ręką człowieka", a natura – to co nawet nie jest nią tknięte, a co dopiero stworzone (Człowiek stworzył kulturę, a Bóg – naturę).

Podałem to w kontekście poniższego powiedzenia (na temat matematyki, a konkretnie liczb), autorstwa niemieckiego matematyka i logika Leopolda Kroneckera (1823–1891): **Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, inne są dziełem człowieka** (w oryginale: *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk).*

Nic więc dziwnego, że o liczbach naturalnych (jako stworzonych przez Boga) mówi się, że „mają naturę" (np. pytając się: „Jaka jest natura liczb naturalnych?"). Nigdy zaś nie słyszałem (a wszak jestem matematykiem!), aby kiedykolwiek mówiono (czy pisano) o naturze jakichś innych liczb. To normalne! – Wszak należą one do świata kultury (jako stworzone przez człowieka), a nie natury (tych stworzonych przez Boga).

Przy okazji pozwolę tu też sobie dodać, że:

1) Najtrudniej jest badać to co boskie, niezbadane (do końca) – liczby naturalne (wiem co mówię! – chodzi tu głównie o tę część liczb naturalnych, którą stanowią liczby pierwsze – tymi zagadnieniami zajmuje się dział matematyki zwany „teorią liczb", a mający zastosowanie m.in. w kryptografii).

2) Analogiczne do powyższego powiedzenia o liczbach, wypowiedział się Samuel Adalberg (polski historyk żydowskiego pochodzenia, paremiolog, folklorysta i wydawca tekstów staropolskich; 1868 – 1939): **Pan Bóg stworzył wieś, a człowiek miasto**. – To też jest oczywiste! Wszak życie na wsi (tradycyjnej) jest bardziej naturalne niż w mieście.

LICZBY PARZYSTE I NIEPARZYSTE

Liczba parzysta – to taka liczba całkowita, którą można podzielić przez *2* (bez reszty*): ...−6, −4, −2 ,0 ,2 ,4 ,6 ,...*
Liczba nieparzysta – to taka liczba całkowita, której nie można podzielić przez *2* (przy dzieleniu przez dwa daje resztę *1*): *...−5, −3, −1 ,1 ,3 ,5 ,...*

LICZBY PIERWSZE I ZŁOŻONE

Liczba pierwsza – to taka liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynkę i samą siebie (w związku z tym jedynka nie jest liczbą pierwszą, bo dzieli się tylko przez *1*). Liczbami pierwszymi mniejszymi od *100* są: *2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 71, 73, 79, 83, 89* i *97*.

Wszystkie pozostałe liczby naturalne większe od 1 dzielą się jeszcze przez co najmniej jedną inną liczbę (*6=2·3*, *24=2·12=2·2·2·3, 25=5·5, 65=5·13*). Tego typu liczby nazywamy liczbami złożonymi – każdą z nich można zapisać w postaci iloczynu mniejszych liczb naturalnych.

Liczbę naturalną złożoną, można podzielić bez reszty przez inną liczbę naturalną, większą od *1*. Przykłady:
- ponieważ *6=2·3* (tj. jest liczbą złożoną), zatem *6/2 = 3*, jak i *6/3 = 2*,
- ponieważ *45 = 5·9= 5·3·3* (tj. jest liczbą złożoną), zatem mamy: *45/3=15, 45/15=3, 45/9=5, 45/5=9*.

Liczba *17* nie jest złożona (jest pierwsza), ponieważ dzieli się tylko przez *1* i przez samą siebie – rozkład na iloczyn innych czynników naturalnych nie istnieje.

Podsumowując, możemy powiedzieć, że każda liczba naturalna większa od *1* jest albo pierwsza albo złożona, tj. jest iloczynem liczb pierwszych.

2. Przybliżenia (czyli zaokrąglenia) liczb

Po co zaokrąglamy liczby?
- aby w ogóle dało się ją zapisać (gdy jest niewymierna – w ogóle nie da się jej dokładnie zapisać, bo ma nieskończenie wiele „losowych” cyfr po przecinku) lub nie używać zapisu okresowego (gdy jest co prawda wymierna, ale okresowa),
- aby można było ją „objąć”/„ogarnąć” (jeśli zapytasz się kogoś ile zarabia, a ten odpowie Ci *3.758,30* – to pewnie zapamiętasz *58,30*, czyli niewiele z tej kwoty. Gdy zaś powie Ci (wcale nie kłamiąc, tylko zaokrąglając) *3.800* – od razu „załapiesz” i zapamiętasz tę kwotę,
- żeby komuś dać napiwek ;) ,
- „żeby nie skłamać” – mówimy np. coś koło *300*, gdy wiemy, że jest to *280* kilka, ale nie wiemy ile i nie zależy nam (albo osobie do której mówimy) na dokładności,
- bo nie potrzebujemy jej aż w takiej dokładności,
- lub wręcz nie możemy jej stosować z taką dokładnością (np. konieczność zaokrąglenia w zeznaniu podatkowym, czy zaokrąglenie obliczonej ceny towaru „na wagę” do pełnych groszy).

W jaki sposób zaokrąglamy liczby? Decyduje o tym pierwsza cyfra po tej cyfrze do której chcesz ją zaokrąglić:
- jeśli jest równa co najmniej *5* (wiesz już co to znaczy – wynosi *5* lub więcej) – to tę cyfrę do której zaokrąglasz podbijasz o *1*, a to co za nią „zdejmujesz”,
- jeśli zaś jest mniejsza niż *5* (inaczej mówiąc: równa co najwyżej *4*) – to nic nie robisz z cyfrę do której zaokrąglasz, a to co za nią stoi – „zdejmujesz”.

Najlepiej pokażę Ci to na kilku przykładach.

Najpierw weźmy liczba *3,35746* i po kolei będziemy zaokrąglać ją do:
- *4* miejsc po przecinku: *3,3575* (podbiłeś *4.* pozycję po przecinku o *1* /z *4* do *5*/, bo za nią stała *6*, a więc liczba *≥5*),
- *3* miejsc po przecinku (a więc do części tysięcznych): *3,458* (podbiłeś *3.* pozycję po przecinku o *1* /z *7* do *8*/, bo za nią stała *4*),
- *2* miejsc po przecinku (a więc do części setnych): *3,36* (podbiłeś *2.* pozycję po przecinku o *1* /z *5* do *6*/, bo za nią stała *7*, co jest *≥5*),
- *1* miejsca po przecinku (a więc do części dziesiętnych): *3,4* (podbiłeś *1.* pozycję po przecinku o *1* /z *3* do *4*/, bo za nią stała *5*, co jest ≥5),
- do całości: *3* (nic nie robisz z tą „*3*”, bo za nią w wyjściowej liczbie stoi *3*, a więc liczba *<5*).

Rozpatrzmy jeszcze 2 przykłady:

- gdy liczbę *12,37997* zaokrąglamy do *4.* miejsca po przecinku, to otrzymujemy: *12,3800* – w tym przypadku „*7*" podbiła *9* do *10* – doszło więc do „przepełnienia rejestru" – z *9* zrobiła się *0*, a ze stojącej przed ową *9* kolejną *9* – *10*, co z kolei podbiło *7* do *8*, dając nam *12,3800 = 12,38*;
- gdy z kolei zaokrąglimy *99,99* do pełnych dziesiątek – otrzymamy (przez kolejne przepełnienia) liczbę *100* (w poprzednich przykładach zaokrąglenie części ułamkowej nie powodowały zmian części całkowitej; w tym przykładzie – już tak, i do od razy z dwoma przepełnieniami).

W ogóle, możemy zaokrąglać nie tylko do części ułamkowych, lecz od razu do całkowitych: pełnych jedności, dziesiątek, setek, tysięcy, dziesiątek tysięcy, ... i to niezależnie czy na wejściu mamy do czynienia z liczbą całkowitą, czy z liczbą mieszaną. Wtedy po cyfrze do której zaokrąglamy aż do przecinka zostawiamy same zera, a za przecinkiem możemy je zostawić lub zdjąć (choć zwykle zdejmujemy).

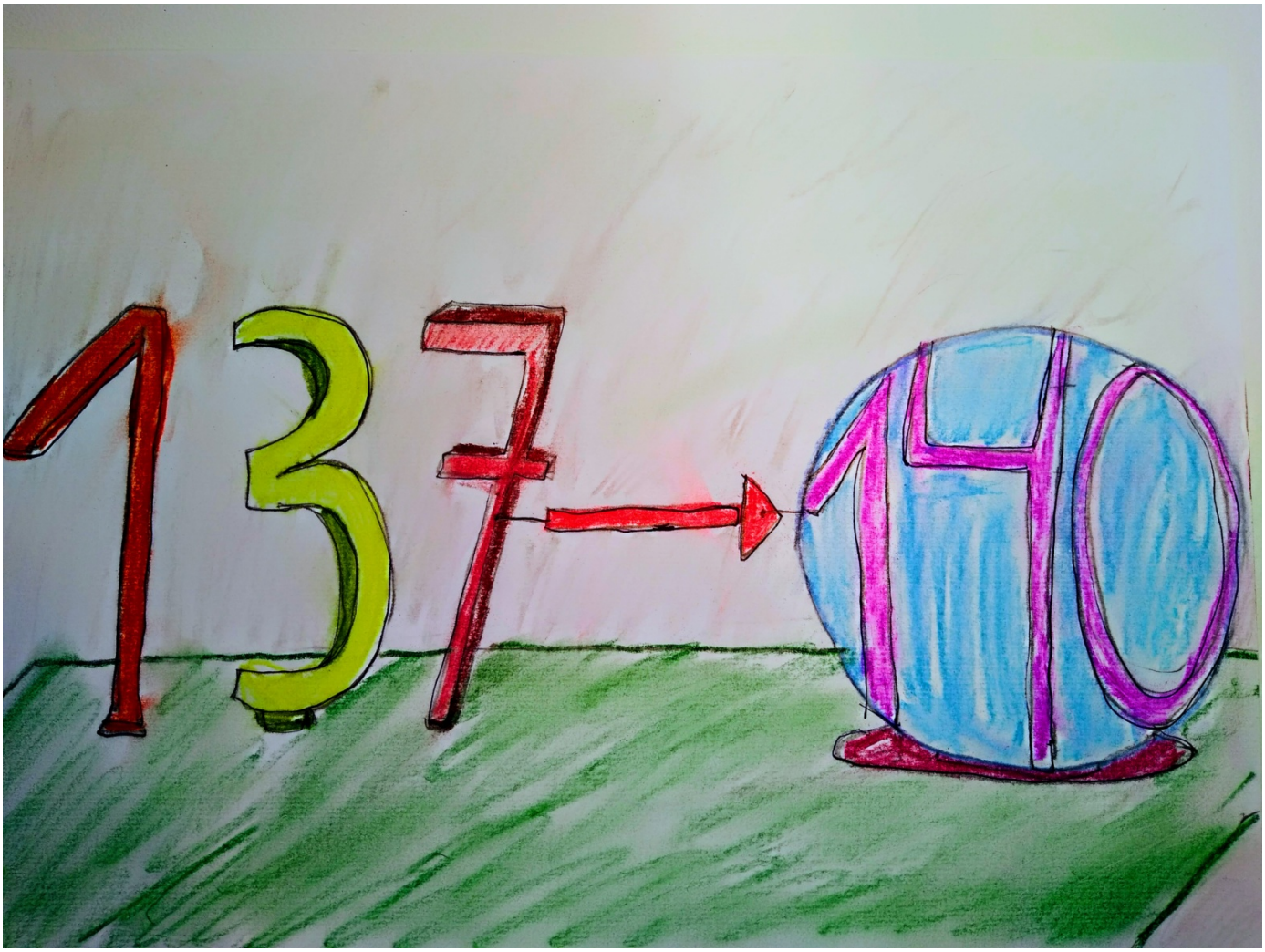
Jak to działa? Otóż analogicznie (choć nie tak samo!) jak to miało miejsce w przypadku części ułamkowych, gdzie zaokrąglenie do *n*-tej liczby po przecinku było *de facto* zostawieniem jej lub podbiciem (w zależności od tego jaka jest kolejna cyfra) i zastąpieniem kolejnych cyfr od *n+1.* po przecinku w prawo zerami. Wiadomo, że wszystkie końcowe zera po przecinku można zostawić, jak i usunąć, co nie wpłynie na wartość liczby.

Gdy będziemy zaokrąglać liczby do części całkowitej – robimy analogicznie: wszystkie cyfry po przecinku znikną (lub zostawimy je jako zera), a pierwsza przed przecinkiem:

- zostaje bez zmian, gdy pierwsza cyfra po przecinku była mniejsza od *5*,
- podbija się o *1*, w przeciwnym przypadku (tj. gdy pierwsza cyfra po przecinku była większa lub równa *5*).

Możemy też zaokrąglać liczbę do pełnych dziesiątek, setek, tysięcy, … Wtedy tę cyfrę podbijamy o *1* lub zostawiamy bez zmian (w zależności od tego jaka jest następną cyfra w tej liczbie – zgodnie z wcześniej przytoczonym zasadami) i ową kolejną, jak i kolejne stojące od niej na prawo cyfry (o ile istnieją) – zerujemy.

Przykład: $13.759 \approx 13.760 \approx 13.800 \approx 14.000 \approx 10.000$.



Muszę napisać Ci jeszcze o zaokrąglaniu liczb ujemnych. Otóż liczby ujemne zaokrąglamy tak, jakby były dodatnie i potem dopisujemy do nich minus, np. *-3,7 ≈ -4* (a nie *-3*!). I tyle!

Błąd przybliżenia

Przy zaokrąglaniu dochodzi do powstania tzw. błędu przybliżenia (co przy tym ciekawe, błąd przybliżenia nie jest błędem, bo powstaje nie w wyniku naszego uchybienia, lecz celowego, i do tego pozytywnego (dlaczego pozytywnego – patrz wyjaśnienie dlaczego zaokrąglamy) działania.

Dlaczego więc mimo to nazywa się błędem? – Bo wynik po zaokrągleniu (*WZ*) odbiega od właściwego (*WW*), i właśnie różnicę między nimi nazywany błędem zaokrąglenia, a właściwie błędem bezwzględnym zaokrąglenia (*BB*), i może być on z niedomiarem (gdy zaokrąglamy w dół) lub z nadmiarem (gdy zaokrąglamy w górę). Tak więc:

- *103 ≈ 100* – mamy tu *BB = 103-100 = 3* – jest to błąd bezwzględny z niedomiarem,
- *97 ≈ 100* – mamy tu *BB = 100-97 = 3* – jest to błąd bezwzględny z nadmiarem.

Zauważ tu, że zawsze odejmowaliśmy tu od liczby większej liczbę mniejszą, by otrzymać liczbę dodatnią.

Mamy jeszcze błąd względny przybliżenia (*BW*), który jest stosunkiem (inaczej: ilorazem) błędu bezwzględnego do (to ważne!) liczby zaokrąglanej. Oprócz takiej formy ułamkowej, można go też podać w postaci procentowej, mnożąc ów ułamek przez *100 %* (czyli przez *1*!). *BW* oddaje „skalę" przybliżenia. Sam zapewne mi przyznasz, że czym innym jest przybliżenie *13* do *10* (*BB = 3, BW = 3/13 = (3/13) *100% ≈ 23%*), a czym innym jest przybliżenie *103* do *100* (gdzie co prawda – podobnie jak powyżej – *BB = 3*, jednak już *BW = 3/103 = (3/103) *100% ≈ 2,9%*).

3. Pozycyjne i niepozycyjne systemy zapisu liczb

C*o oznacza zapis 5.037? Oznacza on liczbę o wartości: 5 tysięcy, 0 setek, 3 dziesiątki i 7 (jedności, czyli po prostu* 7), tj. liczbę pięć tysięcy trzydzieści siedem. *5* jest tu na pozycji tysięcy, więc oznacza *5* tysięcy. W liczbie *452 – 5* jest na pozycji dziesiątek, więc oznacza *50*, a w liczbie *235 – 5* jest na pozycji jedności, więc oznacza po prostu *5*. Jak więc widzisz, to gdzie stoi ta „5" decyduje o tym, jaką wartość w tej liczbie faktycznie przyjmuje:

- na pierwszej od prawej pozycji – po prostu *5* (bo określa ile mamy jedności),
- na drugiej od prawej – *10* razy więcej, czyli *10* (bo określa ile mamy dziesiątek),
- na trzeciej od prawej – kolejne *10* razy więcej, czyli *100* (bo określa ile mamy setek),
- …

Taki system, stosowany przez nas na co dzień, nazywamy **dziesiętnym pozycyjnym systemem zapisu liczb**. Jest on pozycyjny, bo to jaką wartość przyjmie dana cyfra zależy od tego na której pozycji ona stoi, a dziesiętny – bo wartość każdej kolejnej na lewo pozycji jest *10* razy większa niż poprzedniej oraz z uwagi na fakt, że wykorzystujemy w nim *10* cyfr: *0, 1, 2, … , 8* i *9*.

Znany jest on jako system arabski lub indyjsko-arabski, jako że został zapoczątkowany w Indiach w V w. n.e., a rozpowszechnił się w krajach arabskich dzięki matematykowi al-Chwarizmi, który w połowie VIII w. przetłumaczył na arabski indyjską książkę o matematyce. Hindusi na oznaczanie cyfr przyjęli umowne znaki od *1* do *9* oraz wynaleźli zero (*0*). Oprócz nazw dla poszczególnych cyfr, podawali też oddzielne nazwy dla kolejnych potęg liczby *10*, co było związane ze stworzoną przez nich zasadą pozycyjnego przedstawiania liczb. Z kolei Arabowie wprowadzili sposób zapisu i czytania liczb, w którym podajemy cyfrę, a potem rząd w jakim ona stoi. Do rozwoju i popularyzacji systemu dziesiętnego w Europie przyczynił się włoski matematyk, kupiec i podróżnik Leonardo Fibonacci. Zafascynowany systemem, w *1202* roku napisał książkę „Liber Abaci", w której tłumaczył jak używać arabskich cyfr, jak dodawać, odejmować i wykonywać inne działania w systemie dziesiętnym. Zarówno zapis tych liczb, jak i stosowanie na nich operacji, było o wiele prostsze niż w przypadku dotychczas stosowanego w Europie rzymskiego sposobu zapisu liczb (o którym napiszę Ci za chwilę).

Oprócz pozycyjnego systemu dziesiątkowego mamy też inne systemy pozycyjne, szczególnie wykorzystywane w informatyce: dwójkowy (korzysta tylko z *2* cyfr: *0* i *1*), ósemkowy (używał cyfr od *0* do *7*, był wykorzystywany w ZETO – Zakładach Elektronicznej Techniki Obliczeniowej – do indeksowania szpul z taśmami z danymi), czy szesnastkowy (używany w języku programowania Assembler, do kodowania znaków ASCI; oprócz cyfr *0 – 9* są w nim jeszcze cyfry oznaczane literami: *A=10, B=11, C=12, D=13, E=14* i *F=15*). Jak więc widzisz, w systemie pozycyjnym cyfr jest zawsze tyle, ile wynosi podstawa *p* tego systemu: *0, 1, 2, …, p−1*.

Zaletą systemów pozycyjnych jest ich klarowność, łatwość dokonywania nawet złożonych operacji arytmetycznych oraz możliwość zapisu dowolnie dużej liczby, jednak do zapisu bardzo dużych liczb jest potrzebna duża liczba cyfr.

Napomknijmy, że po dziś dzień zachowały się historyczne, wywodzące się z Babilonii, systemy zapisu liczb o wartości: *12, 60, 90, 360* (obecnie stosowane są one do zapisu np. czasu, czy długości i szerokości geograficznej).

Rzymski system zapisu liczb

W systemie rzymskim posługujemy się znakami: I, V, X, L, C, D, M, gdzie: I = *1*, V = *5*, X = *10*, L = *50*, C = *100*, D = *500*, M = *1000*. Wartość I, V i X zapewne każdy bez trudu pamięta; trudniej jest z L, C, D i M. Jest i na to sposób – tzw. mnemotechniczny. Wystarczy zapamiętać: „Lubię Ciebie Dobry Mikołaja" – i sprawę mamy załatwioną ☺

Rzymski sposób zapisywania liczb jest sposobem addytywnym (addidtion – z ang. „dodawania"), czyli wartość danej liczby określa się na podstawie sumy wartości jej znaków cyfrowych. Wyjątkami od tej zasady są liczby: *4, 9, 40, 90, 400* i *900*, do opisu których używa się odejmowania. Podczas zapisywania liczb w systemie rzymskim należy dążyć zawsze do tego, aby używać jak najmniejszej liczby znaków, pamiętając przy tym o następujących zasadach:

1. obok siebie mogą stać co najwyżej trzy znaki spośród: I, X, C lub M (choć nieraz jeszcze na tarczach zegarów można spotkać zapis *4* zamiast IV w postaci IIII – patrz grafika obok);
2. obok siebie nie mogą stać dwa znaki: V, L, D (bo zawsze można by taką sytuację sprowadzić do prostszej: VV = X, LL = C, DD = M);
3. nie może być dwóch znaków oznaczających liczby mniejsze bezpośrednio przed znakiem oznaczającym liczbę większą;
4. znakami poprzedzającymi znak oznaczający większą liczbę mogą być tylko znaki: I, X, C.

W ten sposób – według tych reguł i za pomocą dostępnych wyżej podanych znaków – można zapisać jedynie liczby od *1* do *3999*, ponieważ nie istnieją znaki dla liczb większych od *1000*. Większe liczby można zapisywać poprzez nadkreślenie oznaczające pomnożenie wartości przez *1000*. Zasada odejmowania wartości, na mocy której *4* i *9* zapisywało się jako IX i IV, stała się powszechna dopiero w czasach średniowiecznych (stąd też zapis *4* w postaci jak na powyższej tarczy zegara: IIII, jest właśnie zapisem historycznym, mającym zapewne dodać nimbu powagi). W ogóle zapis rzymski uchodzi za bardziej majestatyczny, poważny (dlatego np. licea numeruje się za jego pomocą, a szkoły podstawowe – za pomocą dziesiętnego systemu arabskiego). Mimo to rzymski system ma jedną wadę: jest niewygodny w prowadzeniu nawet prostych działań arytmetycznych.

VI. PROSTE ZALEŻNOŚCI MIĘDZY LICZBAMI - W MATEMATYCE I W PRAKTYCE

1. Podstawowe określenia i ich oznaczenia (przydatne w kolejnych paragrafach tego rozdziału)

Stała – to taka wartość, która się nie zmienia. W fizyce mamy sporo stałych: temperatura zera bezwzględnego, temperatura wrzenia wody przy ciśnieniu atmosferycznym *1000 hPa*, prędkość światła, … W chemii też mamy stałe, jak np. stała Avogadra (stała fizyczna liczbowo równa liczbie atomów, cząsteczek lub innych cząstek materii zawartych w jednym molu tej materii), czy stałe dysocjacji dla poszczególnych kwasów.
W matematyce stałą jest chociażby liczba π (równa w przybliżeniu *3,14159*). Choć jest stała, to jednak niestety nie sposób jej podać dokładne, bo ma nieskończenie wiele cyfr po przecinku i nie ma tam żadnej regularności. Inną ważną stałą w matematyce jest liczba *e* (równa w przybliżeniu *2,71*). Mogłeś o niej nie słyszeć, ale ważne abyś chociaż wiedział, że istnieje…
Zmienne – to takie litery, które (jak wskazuje ich nazwa) mogą przyjmować różne wartości (bywa, że dowolne, ale bywa i że w ograniczonym zakresie – w tzw. dziedzinie). Ty z matematyki znasz je zapewne pod nazwami *x* i *y* (choć mogą też występować inne ich oznaczenia, jak np. *z*, *u*, *k*,...). Często jest tak, że są one ze sobą powiązane wzorem, a co za tym idzie – zmiana wartości jednej z nich powoduje zmianę wartości drugiej.
Parametr – z tym pojęciem zapewne część osób spotkała się w szkole, a (pozostała) część „niekoniecznie". Parametrem nazywamy taką literkę, która zastępuje konkretną liczbę. Przykład użycia: zbadaj ile pierwiastków (tj. rozwiązań) ma równanie kwadratowe $3x^2 + mx - 7 = 0$ w zależności od wartości parametru *m*.
Współczynnik – wartość liczbowa (może być wyrażona symbolem) będąca składową jednomianu. Np. w $3x^2y$ współczynnikiem jest *3*, a w $axyz$ – współczynnikiem jest *a*.

Pierwiastkiem nazywamy zarówno wynik pierwiastkowania, jak i jedno (dowolne) z rozwiązań równania.
Mówimy, że zmienna **spełnia równanie**, jeśli jest jednym z jego rozwiązań. Tak np. *3* spełnia równanie $x + 2 = 5$, a tak liczba *2* jak i *-2* spełniają równanie $x^2 = 4$.
Tak więc następujące określenia są synonimami (określeniami oznaczającymi to samo lub prawie to samo): „spełniać równanie", „być rozwiązaniem równania", „być pierwiastkiem równania".

2. Przekształcanie wzorów

W paragrafie 1 rozdziału VII, podam Ci zasadę trójkąta na przekształcanie wzoru postaci $a = \frac{b}{c}$ lub $b = a \cdot c$, tj. gdy jest podany w postaci iloczynowej lub ilorazowej. Jak jednak należy przekształcać wzór, gdy jest on w innej postaci (potęgowej, logarytmicznej, sumy, różnicy, czy jako pierwiastek) lub pracować, gdy jest on jeszcze bardziej złożony? Odpowiedź jest prosta: „po nitce do kłębka" i korzystając z definicji tych operacji oraz wykorzystując operacje odwrotne.

<u>Przykład 1</u>
y = x + 2 – stąd x = y – 2.

<u>Przykład 2</u>
$log_2x=y$ – stąd $x=2^y$ – korzystamy z definicji logarytmu.

<u>Przykład 3</u>
$y = \frac{x-2}{x}$ – stąd:
1) $xy = x - 2$
2) $xy - x = 2$
3) $x(y - 1) = 2$
4) $x = \frac{2}{y-1}$

Jeśli ten wzór ustawimy w postaci y = ... (a tu po prawej stronie y już nie występuje) – to będzie to wzór na obliczenie wartości y (w oparciu o pozostałe zmienne, występujące po prawej stronie równania). Zwykle odpowiednio przekształcając ten wzór możemy otrzymać wzór na wartość innej zmiennej występującej w tym wzorze: x = ... Taka operacja nazywa się przekształcaniem wzoru (my omówimy to 1. paragrafie następnego rozdziału).

3. Proporcje proste i odwrotne

Jeśli mamy ZALEŻNOŚĆ $\frac{a}{b} = const.$ (gdzie *const.*, to z łaciny *constans*, czyli stała wartość), to mamy tu do czynienie z tzw. **proporcją prostą**.
Jeśli ową stałą wartość zastąpimy literką c, to otrzymamy: $\frac{a}{b} = c$, a stąd $a = b \cdot c$ oraz $b = \frac{a}{c}$.
Ponieważ iloraz jest tutaj stały, zatem zależność ta mówi, że:
– IM WIĘCEJ mamy jednego (a), TYM (tyle razy) WIĘCEJ mamy drugiego (b)
– lub równoważnie: IM MNIEJ mamy jednego (a), TYM (tyle razy) MNIEJ mamy drugiego (b).
Innymi słowy te dwie wartości są **pozytywnie skorelowane** (można też powiedzieć: **dodatnio skorelowane**).
Jeśli więc piekarz ma *3* razy więcej mąki – to może *3* razy więcej upiec chleba. Jeśli z kolei ma *2* razy mniej mąki – to oczywiście *2* razy mniej chleba jest w stanie upiec.
Inny zapis omawianej tu zależności – proporcji prostej, w naturalny sposób odnoszący się do dopiero co przytoczonego przykładu: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} (= const.)$
Wtedy:
a_1 – obecny zasób mąki
b_1 – ile obecnie można upiec chlebów
a_2 – zasób mąki po zamianie
b_2 – ile można upiec chlebów w nowej sytuacji (po zmianie ilości mąki)
Jeśli a_2 jest *3* razy większe od a_1 – to i b_2 będzie *3* razy większe od b_1 – pomnożyliśmy licznik i mianownik (rozszerzyliśmy ułamek) przez tę samą liczbę *3*.
Z kolei gdy a_2 jest *2* razy mniejsze od a_1 – to i b_2 będzie *2* razy mniejsze od b_1 – podzieliliśmy licznik i mianownik (skróciliśmy ułamek) przez tę samą liczbę *2*.

Jeśli mamy ZALEŻNOŚĆ $a \cdot b = const.$, to mamy tu do czynienie z tzw. **proporcją odwrotną**.
Jeśli – analogicznie jak to miało miejsce powyżej – ową stałą wartość zastąpimy literką c, to otrzymamy: $a \cdot b = c$, a stąd $a = \frac{c}{b}$ i $b = \frac{c}{a}$.
Ponieważ iloczyn jest tutaj stały, zatem zależność ta mówi, że:
– IM WIĘCEJ mamy jednego (a), TYM (tyle razy) MNIEJ mamy drugiego (b)
– lub równoważnie: IM MNIEJ mamy jednego (a), TYM (tyle razy) WIĘCEJ mamy drugiego (b).
Jeśli więc np. jedziemy *3* razy szybciej – to w czasie *3* razy krótszym pokonamy daną trasę (oczywiście o ile przez tę prędkość po drodze się nie zabijemy). Jeśli z kolei będziemy jechać *2* razy wolniej (tj. z *2*-krotnie mniejszą prędkością) – to *2* razy więcej czasu zajmie nam ta podróż.
Inny zapis tej zależności, to: $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 (= const)$.
TUTAJ:
Jeśli a_2 jest *3* razy większe od a_1 – to b_2 będzie *3* razy mniejsze od b_1.
Z kolei gdy a_2 jest *2* razy mniejsze od a_1 – to b_2 będzie *2* razy większe od b_1 .

4. Przeliczanie walut

Wszystkie zagadnienia rozpatrzymy tu na przykładach.
Najpierw będziemy wykorzystywać przelicznik (kurs, zależność) między złotówkami (PLN) a euro (EUR):
1 EUR = *4,47* PLN (*)
<u>Przykład 1</u>
Jaka jest wartość *5* EUR?

Jest to bardzo prosta „zagadka” – wystarczy obie strony równania (*) pomnożyć przez *5* – i otrzymujemy:
5 EUR = *22,35* PLN
Mamy tu bowiem proporcję prostą:
1 EUR – *4,47* PLN
5 EUR – *x*
2 metody jej rozwiązania:
1) Po lewej stronie tej zależności widzimy, że dolną linię otrzymuje się z górnej przez pomnożenie jej przez *5*, więc $x = 2,47$ PLN $\cdot$ $5 = 22,35$ PLN
2) mnożę na krzyż: 1 EUR $\cdot$ $x = 4,47$ PLN $\cdot$ 5 EUR
skracam EUR po obu stronach: $1 \cdot x$ = 4,47 PLN $\cdot$ 5
wymnażam: $x = 22,35$ PLN

Przykład 2
Jestem za granicą. Widzę towar za *18* EUR. Ile mi bank zdejmie z konta PLN za jego zakup kartą, jeśli za transakcje walutowe kartą pobiera *3 %*, nie mniej niż *4* PLN?
1) Najpierw policzmy *18* EUR – ile to złotych: *18* EUR = $18 \cdot 4,47$ PLN = *80,46* PLN
2) Następnie policzmy od tego *3 %*: $0,03 \cdot 80,46$ PLN = *2,42* PLN
3) Ponieważ jest to mniej niż *4* PLN, więc prowizja wyniesie *4* PLN , a więc z konta zejdzie nam:
80,46 PLN + *4* PLN = *84,46* PLN .

Przykład 3
Jesteś za granicą (w UE). Obowiązują cię te same warunki prowizji co w poprzednim przykładzie. Oblicz do jakiej kwoty EUR będziesz płacić *4* PLN prowizji, a tym samym od której kwoty będzie liczona prowizja procentowa. Oznaczmy przez *x* – ową graniczną kwotę w EUR. Mamy więc:
$x \cdot 4,47 \cdot 0,03 = 4$
$x \cdot 0,1341 = 4$
$x = 29,83$ – do tej kwoty (w EUR) płacisz *4* PLN prowizji, przy większej kwocie – płacisz *3 %* prowizji.

Przykład 4

Wyjeżdżam za granicę. Na okazyjne wydatki chcę przeznaczyć *100* PLN. Na ile EUR mogę je wymienić w kantorze (przed wyjazdem), skoro tam *1* EUR mogę kupić za *4,65* PLN (kantor dolicza bowiem sobie prowizję)?

Tu znowu mamy proporcję prostą, tylko że po innej stronie jest zmienna *x*.

1 EUR – *4,65* PLN

x – *100* PLN

1) Najprościej policzymy to tak:

a) formalnie: (*100* PLN / *4,65* PLN) · *1* EUR = *21,50* · *1* EUR = *21,50* EUR

b) praktycznie: ile razy *100* jest większe od *4,65*?: *100 / 4,65 = 21,50* – tyle właśnie EUR mogę kupić.

2) stosujemy zasadę mnożenia na krzyż:

a) najpierw wykonuję to mnożenie: *x* · *4,65* PLN = *1* EUR · *100* PLN

b) następnie skracamy przez „PLN”: *x* · *4,65*= *1* EUR · *100*

c) w końcu dzielimy obustronnie przez *4,65* (by po lewej stronie mieć tylko *x*): *x* = *21,50* EUR

W kolejnym przykładzie będziemy mówić o jenach japońskich w kontekście naszych złotówek.

Przykład 5

Wartość niektórych walut (tych, które mają niską wartość nominalną) podawana jest dla *100* jej jednostek. Jest tak np. w przypadku jenów (japońska jednostka monetarna): *100* JPN = *3,70* PLN.

Jesteś w Japonii, masz gotówkę (jeny). Kanapka kosztuje *350* jenów ile to złotych?

a) W *350* JPN ile jest *100* JPN? *350/100 = 3,5* – mamy więc *3,5* takich setek jenów.

b) Każda z nich – to *3,70* PLN, a zatem mamy: *3,5* · *3,70* PLN = *12,95* PLN.

W kolejnych dwóch przykładach „przenosimy się” do Egiptu, gdzie mamy funty egipskie.

Przykład 6

Jesteś w Egipcie. Chcesz umieć szybko przeliczać funty egipskie na złotówki oraz złotówki na funty egipskie. Jak to zrobisz?

Wiesz, że *100* funtów egipskich (EGH) – to *24,71* PLN

Tak więc *1* EGH – (w przybliżeniu) *0,25* PLN, czyli *4* EGH – to *1* PLN.

Tak więc gdy znasz cenę jakiegoś towaru czy usługi w Egipcie, to DZIELISZ tę kwotę przez *4* i masz (w przybliżeniu) cenę w PLN.

W Egipcie, gdzie się targuje – przeważnie jest odwrotnie. – Wiesz ile byś chciał góra za coś zapłacić w PLN i chcesz wiedzieć do jakiej to właśnie kwoty powinieneś zbić ofertę Egipcjanina. W tym celu MNOŻYSZ kwotę w PLN przez *4* – i masz (w przybliżeniu) szukaną kwotę w EGH.

Przykład 7

Jesteś w Egipcie. Płacisz kartą. Tutaj jednak najpierw ta kwota przeliczana jest na EUR (z prowizją *5 %*), a następnie na PLN (z prowizją *4 %*). Ile wynosi łączna prowizja operatora karty? Mamy po kolei:

x – kwota zapłaty (w przeliczeniu na PLN) bez prowizji

x · *1,05* – kwota zapłaty (w przeliczeniu na PLN) z prowizją przewalutowania na EUR

(*x* · *1,05*) · *1,04* = *1,092* · *x* – kwota zapłaty (w przeliczeniu na PLN) z prowizją przewalutowania na EUR i następnie z prowizją przewalutowania tego na PLN; jak widać – łączna prowizja wynosi *9,2* procent.

VII. PRZEKSZTAŁCANIE LICZB POPRZEZ WYKONYWANIE NA NICH OPERACJI

1. Podstawowe operacje na liczbach

Mamy **4 podstawowe operacje na liczbach**: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Zacznijmy od podania jak się nazywają ich składowe (liczby na których wykonuje się te działania), jak i jakie nazwy noszą wyniki tych działań.

1) DODAWANIE: a + b = c
składniki suma

2) ODEJMOWANIE: a – b = c
odjemna odjemnik różnica
składniki

3) MNOŻENIE: a · b = c
mnożna mnożnik iloczyn
czynniki

4) DZIELENIE: a : b = c
dzielna dzielnik iloraz

Pierwsza liczba w tych operacjach jest rodzaju żeńskiego, a druga – męskiego (wszak kobietę puszczamy pierwszą)

Niech ⊕ oznacza dowolną liczbę dodatnią, Θ – dowolną liczbę ujemną, a 0 – to po prostu zero.
Dodatkowo: W oznacza, że wynik może być wszelaki (⊕, Θ lub 0), a x – że działanie jest niewykonalne.

Poniżej zamieszczam *4* pary tabelek – dla *4* podstawowych działań arytmetycznych dokonywanych na w/w kategoriach liczb – dla każdej pary (działania) najpierw ogólny wynik (w lewej tabelce), a następnie zobrazowanie tego na konkretnych przykładach (w prawej tabelce).

Zacznijmy od **dodawania**.

Dodawanie: I + II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	W	⊕	⊕
	0	Θ	0	⊕
	Θ	Θ	Θ	W

Dodawanie: I + II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	*2 + (-5) = 2 - 5 = -3;* *2 + (-2)=2 - 2 = 0;* *2 + (-1)=2 - 1 = 1*	*2 + 0 = 2*	*2 + 5 = 7*
	0	*0 + (-5) = 0 - 5 = -5*	*0 + 0 = 0*	*2 + 0 = 2*
	Θ	*-2 + (-5) = -2 - 5 = -7*	*(-2) + 0 = -2 + 0 = -2*	*-5 + 2 = -3* *-2 + 2 = 0* *-1 + 2 = 1*

Gdy dodajemy do siebie dwie liczny, to:

1) gdy choć jedna z nich jest zerem (środkowa kolumna i środkowy wiersz – wyniki oznaczone szarym tłem) – to wynik jest równy drugiej z tych liczb,
2) gdy są one tego samego znaku – to wynik też jest tego znaku,
3) gdy są one różnych znaków – to wynik może być wszelakiego znaku (zależy od ich wartości bezwzględnych tych liczb).

<u>UWAGA:</u>

Gdy dodajesz do siebie dwie liczby ujemne, to wynik jest liczbą ujemną: przykład (na bazie tego z powyższej tabelki): jeśli na jednym koncie masz *-2* (debet w wysokości *2*), a na drugim *-5*, to w sumie na tych kontach masz *-7*. Niektórzy (automatycznie) myślą, że tu powinna być PLUS, bo MINUS I MINUS DAJE PLUS, „bo tak uczyli w szkole". Owszem, jest tak, ale przy mnożeniu (i dzieleniu), ale nie przy dodawaniu dwóch liczb ujemnych (czy – jak kto woli – odejmowaniu od liczby ujemnej liczby dodatniej, bo do tego się to działanie sprowadza).

Przejdźmy do **odejmowania**:

Odej–mowanie I – II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	⊕	⊕	W
	0	⊕	0	Θ
	Θ	W	Θ	Θ

Odej–mowanie I – II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	*2 - (-3) = 6*	*2 – 0 = 2*	*3 – 2 = 1* *3 – 3 = 0* *3 – 5 = -2*
	0	*0 - (-2) = 0 + 2 = 2*	*0 – 0 = 0*	*0 – 3 = -3*
	Θ	*-2 - (-1) = -2 + 1 = -1* *-2 - (-2) = -2 + 2 = 0* *-2 - (-5) = -2 + 5 = 3*	*-2 – 0 = -2*	*-2 – 3 = -5*

<u>UWAGA</u>
Odjąć liczbę ujemną (I kolumna w powyższych tabelkach), to dodać liczbę dodatnia (bo minus przed nawiasem zmienia znaki występujących w nim liczb na przeciwne /co to są liczby przeciwne – już wiesz! ☺/) – tym samym różnica jest większa od odjemnej.
Odjęcie zera (II kolumna) nie zmienia wyniku.
Odjęcie liczby dodatniej (III kolumna) zmniejsza wynik.
Odjęcie liczby x od zera daje nam liczbę przeciwną do liczby x, czyli liczbę $-x$.

<u>Zadanie</u> (obiecane w rozdziale IV, na końcu par. *3*)
Ile to jest: *3,4 – 7,2*?
Jestem przekonany, że większość osób błędnie odpowie *-4,2*.
Skąd taki wynik?: *3 – 7 = -4*, a do tego „należy" dopisać *0,4 – 0,2 = 0,2* – stąd właśnie *-4,2*.
Jednak popatrz. W sumie masz *-4 i 0,2*, czyli *-4 + 0,2 = -3,8*.
Który więc wynik jest poprawny?
Aby to rozstrzygnąć zastosujemy metodę omówioną w rozdziale IV, w par. *3*.
Wyjdźmy od prostszego zadania: ile to jest 3 – 5? Cóż – to proste: *-2*! A jak to obliczyłeś? – odpowiesz: „od *5* odjąłem *3* i zmieniłem znak". Brawo! Tak właśnie to się robi! Aby od mniejszej liczby odjąć większą – od większej liczby odejmujemy tę mniejszą i wynik poprzedzamy znakiem „minus".
W ten sposób właśnie ustaliliśmy zasadę.
A teraz tę zasadę zastosujemy do naszego zadania: Ponieważ *7,2 – 3,4 = 3,8*, zatem *3,4 – 7,2 = -3,8*. ☺

Obecnie możemy już przejść do **mnożenia**:

Mno-żenie: I · II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	Θ	0	⊕
	0	0	0	0
	Θ	⊕	0	Θ

Mno-żenie: I · II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	*2 · (-3) = -6*	*2 · 0 = 0*	*2 · 3 = 6*
	0	*0 · (-3) = 0*	*0 · 0 = 0*	*0 · 3 = 0*
	Θ	*(-2) · (-3) = 6*	*(-2) · 0 = 0*	*(-2) · 3 = -6*

Jeśli w mnożenie choć jedna z liczb jest zerem, to i wynik jest zerem.
Jeśli liczby mnożone są różnych znaków – to wynik jest ujemny, a jak takich samych – to dodatni.

<u>UWAGA!</u>
To tu właśnie działa zasada „minus i minus daje plus", o której mówiłem przy dodawaniu (że tam nie działa).

Inne własności mnożenia (często wykorzystywane w rachunkach):

1) Przemienność mnożenia: $a \cdot b = b \cdot a$

2) Łączność mnożenia: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3) Rozdzielność mnożenia względem dodawania (dodawanie się rozdzieliło!): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Przykłady stosowania:

$2 \cdot 7 \cdot 5 = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot 10 = 70$

Prawo 1) (zamieniam miejscami *2* z *7*)

Prawo 2) (zamiast najpierw mnożyć $7 \cdot 2$, najpierw mnożę $2 \cdot 5$)

$3 \cdot 17 + 3 \cdot 23 = 3 \cdot (17 + 23) = 3 \cdot 40 = 120$

Stosuję prawo 3), ale w drugą stronę (tj. że lewa strona = prawa); Równania w matematyce zawsze działają w dwie strony!

Pozostało nam jeszcze **dzielenie**:

Dzielenie: I : II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	Θ	x	⊕
	0	0	x	0
	Θ	⊕	x	Θ

Dzielenie: I : II		II		
		Θ	0	⊕
I	⊕	$6 : (-3) = -2$	x	$6 : 3 = 2$
	0	$0 : (-3) = 0$	x	$0 : 3 = 0$
	Θ	$(-6) : (-3) = 2$	x	$(-6) : 3 = -2$

W dzieleniu znaki są identyczne jak w mnożeniu, z tą różnicą, że nie można dzielić przez zero.

Ponieważ $a - b = a + (-b)$, tj. odejmowanie możemy zapisać jako dodawanie liczby przeciwnej – dlatego też w przypadku odejmowania możemy mówić o składnikach.

Analogicznie jest w przypadku dzielenia: ponieważ $a : b = a \cdot (1/b)$ – dlatego też w przypadku dzielenia możemy mówić o czynnikach.

Nie można dzielić przez *0*! Dzielnik musi więc być różny od zera ($b \neq 0$), a co za tym idzie, mianownik w ułamku (ułamek też przedstawia dzielenie) również musi być $\neq 0$.

Oprócz znaku dzielenia (:, nieraz ÷), czy kreski ułamkowej (–), dzielenie można przedstawiać za pomocą ukośnika (/). Tak więc $2:3 = 2 \div 3 = \frac{2}{3} = 2/3$.

Ten ostatni sposób oznaczania dzielenia stosuje się głównie w informatyce (w zapisach programów komputerowych w poszczególnych językach programowania), czy przy oznaczaniu prędkości (podając ją np. jako 50 km/h).

Ciekawe zero i jedynka

Co robi zero? Jak wygląda w operacjach arytmetycznych – widziałeś już powyżej (w każdym z *4* typów operacji na *9* sytuacji występuje ono – jako liczby na których wykonuje się te operacje – aż *6* razy w 5 na *9* sytuacji).

$a - a = 0;\ a + 0 = 0 + a = a;$
$a - 0 = a;\ 0 - a = -a$
$\underline{0 : a = 0};\ 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0;$

Jak za *a* (oprócz podkreślonego!) wstawisz w tych wzorach 0, to otrzymasz jeszcze bardziej konkretne sytuacje: $0 - 0 = 0;\ 0 + 0 = 0;\ 0 \cdot 0 = 0$

Podobnie ciekawie jest z jedynką:
$1 \cdot a = a \cdot 1 = 1$
$a/1 = 1,\ a/a = 1$

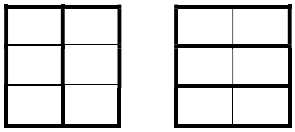
Jak za a wstawisz w tych wzorach 1, to otrzymasz jeszcze bardziej konkretne sytuacje: $1 \cdot 1 = 1;\ 1/1 = 1$

Przemienność:

Dodawanie jest przemienne: $a + b = b + a$, a odejmowanie już nie: $a - b$ zwykle nie jest równe $b - a$; jest przemienne jedynie wtedy, gdy $b = a$, i wynik tego odejmowania jest wtedy równy zero: $a - a = 0$). Nadto pod *a* i *b* zawsze można podstawiać tu dowolne liczby.

Mnożenie jest przemienne: $a \cdot b = b \cdot a$, a dzielnie już nie: $a : b$ zwykle nie jest równe $b : a$; jest przemienne jedynie wtedy, gdy $b = a \neq 0$, i wynik tego dzielenia jest wtedy równy jeden: $a : a = 1$). Nadto przy mnożeniu pod *a* i *b* można zawsze podstawiać dowolne liczby, a przy dzieleniu *a* przez *b*, musi być $b \neq 0$.

Zagadka: $2 \cdot 3$ – to są dwie trójki, czy trzy dwójki? Gdy się uczyłeś mnożenia w jednej z pierwszych klas szkoły podstawowej – na pewno to wiedziałeś. Teraz zaś zapewne masz problem z odpowiedzią na to – jakże proste pytanie... Ponieważ jednak ja jestem matematykiem, zatem – oczywiście – umiem poradzić sobie z tą zagadką.



3 · 2 *2 · 3*

Obok masz rozwiązanie.
Jak więc widzisz $2 \cdot 3$ – są to trzy dwójki,
czy – inaczej mówiąc – dwójka wzięta trzy razy

Odwrotność:

Działaniem odwrotnym do dodawania jest odejmowanie (i oczywiście – równoważne: działaniem odwrotnym do odejmowania jest dodawanie). Oznacza to, że $a + b = c$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = c - b$ (oraz: $b = c - a$).

Z kolei działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie (i oczywiście – równoważnie: działaniem odwrotnym do dzielenia jest mnożnie). Oznacza to, że gdy $b \neq 0$, to $a \cdot b = c$ wtedy i tylko wtedy gdy $a = \frac{c}{b}$.

Gdy $b \neq 0$, to $a \cdot b = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c/b$.

Co zrobić, aby nie mylić pojęć „liczba odwrotna" i „liczba przeciwna"?
Ja radzę sobie w ten sposób, że pamiętam wykutą w szkole „regułkę" (bardzo nie lubię tego słowa!):
podzielić znaczy pomnożyć przez odwrotność dzielnika,
a że pamiętam jak to się robi:
$\frac{x}{5} = x : \frac{5}{1} = x \cdot \frac{1}{5}$ – podzielić przez 5 znaczy pomnożyć przez $\frac{1}{5}$.
$x : \frac{2}{3} = x \cdot \frac{3}{2}$ – podzielić przez $\frac{2}{3}$ znaczy pomnożyć przez $\frac{3}{2}$.
– to wiem, co to jest liczb odwrotna ☺

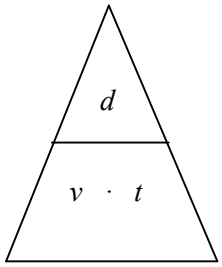
Odwrotność liczby – jest to więc liczba powstała w wyniku jej „przekoziołkowania": $5 = \frac{5}{1} \rightarrow \frac{1}{5}$; $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{2}$ (zero nie ma liczby odwrotnej!).
W takiej sytuacji – dla uzyskania **liczby przeciwnej** pozostaje więc jedynie zrobić „tę drugą operację", z którą może się mylić odwrotność, tj. zmienić znak liczby: $5 \rightarrow -5$; $-3 \rightarrow 3$; $0 \rightarrow 0$.

Liczby odwrotne – to dwie liczby, których iloczyn jest równy 1. Tak więc liczbami odwrotnymi są np. liczby: *2* i *1/2* (bo $2 \cdot ½ = 1$), *−5* i *−1/5* (bo $-5 \cdot (-1/5) = 1$) oraz *7/9* i *9/7* (bo $7/9 \cdot 9/7 = 1$). Liczbą odwrotną do 1 jest 1 (bo $1 \cdot 1 = 1$), a do liczby *0* (jako jedynej!) liczby odwrotnej nie ma! (bo nie ma liczby odwrotnej do *0*, bo nie można dzielić przez *0*).

Z podanym chwilę wcześniej związkiem między mnożeniem i dzieleniem związana jest tzw. „**zasada trójkąta**" pozwalająca bardzo łatwo przekształcać wzory. Pokaże to na przykładzie (bo te najłatwiej zrozumieć i najlepiej wyrywają się w pamięci):
weźmy pod uwagę wzór na prędkość: $v = d/t$ (prędkość = droga / czas):

- jeśli pomnożymy go obustronni przez t, to otrzymamy: $d = v \cdot t$ – wzór na drogę,
- gdy teraz z kolei podzielimy go obustronnie przez v, to otrzymamy: $t = d/v$ – wzór na czas.

Zauważmy, że na podstawie każdego z tych *3* wzorów możemy narysować następujący trójkąt:



1) gdy zasłonimy w nim v – to otrzymamy, że jest ono równe $\frac{d}{t}$

2) gdy zasłonimy w nim t – to otrzymamy, że jest ono równe $\frac{d}{v}$

3) gdy zasłonimy w nim d – to otrzymamy, że jest ono równe $v \cdot t$

Tak więc na podstawie tego trójkąta, jednym przyłożeniem palca otrzymujemy wzór na dowolną (zasłanianą palcem) zmienną.

Mnożenie jest uogólnieniem wielokrotnego dodawania, a dzielenie – wielokrotnego odejmowania (zlicza liczbę odjętych elementów – dzielników z dzielenia).

2. Porządek wykonywania działań

Wykonując działania arytmetyczne musimy pamiętać o właściwej kolejności ich wykonywania. Otóż jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów, to wykonujemy działania w następującej kolejności:

- najpierw potęgowanie i pierwiastkowanie,
- następnie mnożenie i dzielenie w kolejności ich występowania (tj. od lewej do prawej),
- na samym końcu dodawanie i odejmowanie – również w kolejności występowania (tj. od lewej do prawej).

Co do kolejności wykonywania, tę samą rangę mają więc:

- mnożenie z dzieleniem (nie jest tak, że najpierw mnożymy, a potem dzielimy! – działania te wykonujemy w tej kolejności jak są ustawione od lewej do prawej),
- dodawanie i odejmowanie (mamy tu analogiczną uwagę jak powyżej).

ZAPAMIĘTAJ!
Kolejność wykonywania działań:
– działania w nawiasach
– potęgowanie i pierwiastkowanie
– mnożenie i dzielenie
– dodawanie i odejmowanie

Z kolei przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy, wykonujemy najpierw działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma innych nawiasów, i następnie przesuwany się coraz bardziej na zewnątrz.

Przykład 1: Gdy mamy tylko odejmowanie: $100 - 15 - 20 - 13 = 85 - 20 - 13 = 65 - 13 = 52$
Przykładowa interpretacja: mamy *100* zł; najpierw wydajemy *15* zł (więc mamy już tylko *85* zł), potem *20* zł (co zubaża nas do 65 zł), w końcu *13* zł (po tej operacji zostaje nam jedynie *52* zł.
Zauważ, że można to rozumieć też tak: mam *100* zł, wydaję *15* zł, potem *20*, potem *13* (tj. razem ($15 + 20 + 13$), tj. *48* zł, w wyniku czego pozostaje mi *52* zł.
W związku z powyższym, nasze powyższe działania można wykonać też tak:
$100 - 15 - 20 - 13 = 100 - (15 + 20 + 13) = 100 - 48 = 52$

Przykład 2: Gdy mamy odejmowanie i dodawanie: $15 - 7 + 6 - 3 = (15 + 6) - (7 + 3) = 21 - 10 = 11$
– zsumowaliśmy liczby dodatnie, zsumowaliśmy ujemne, i następnie od owych dodatnich odjęliśmy owe ujemne (tak licząc się mamy mniejszą szansę na pomylenie się).
Jak więc widzisz – na dobrą sprawę, gdy mamy tylko dodawanie i odejmowanie – możemy operacje te wykonywać w dowolnej kolejności.

Jeżeli jednak w wyrażeniu występuje tylko **dzielenie** albo **mnożenie i dzielenie**, to działania te OBLIGATORYJNIE wykonujemy w takiej kolejności, w jakiej są zapisane, tj. od strony lewej do prawej.
Przykład 3: $100 : 10 : 2 = 10 : 2 = 5$, a NIE: $100 : 10 : 2 = 100 : (10 : 2) = 100 : 5 = 20$ – widzisz, że otrzymaliśmy różne wyniki!, błąd jest w miejscu zaznaczonym szarym tłem.

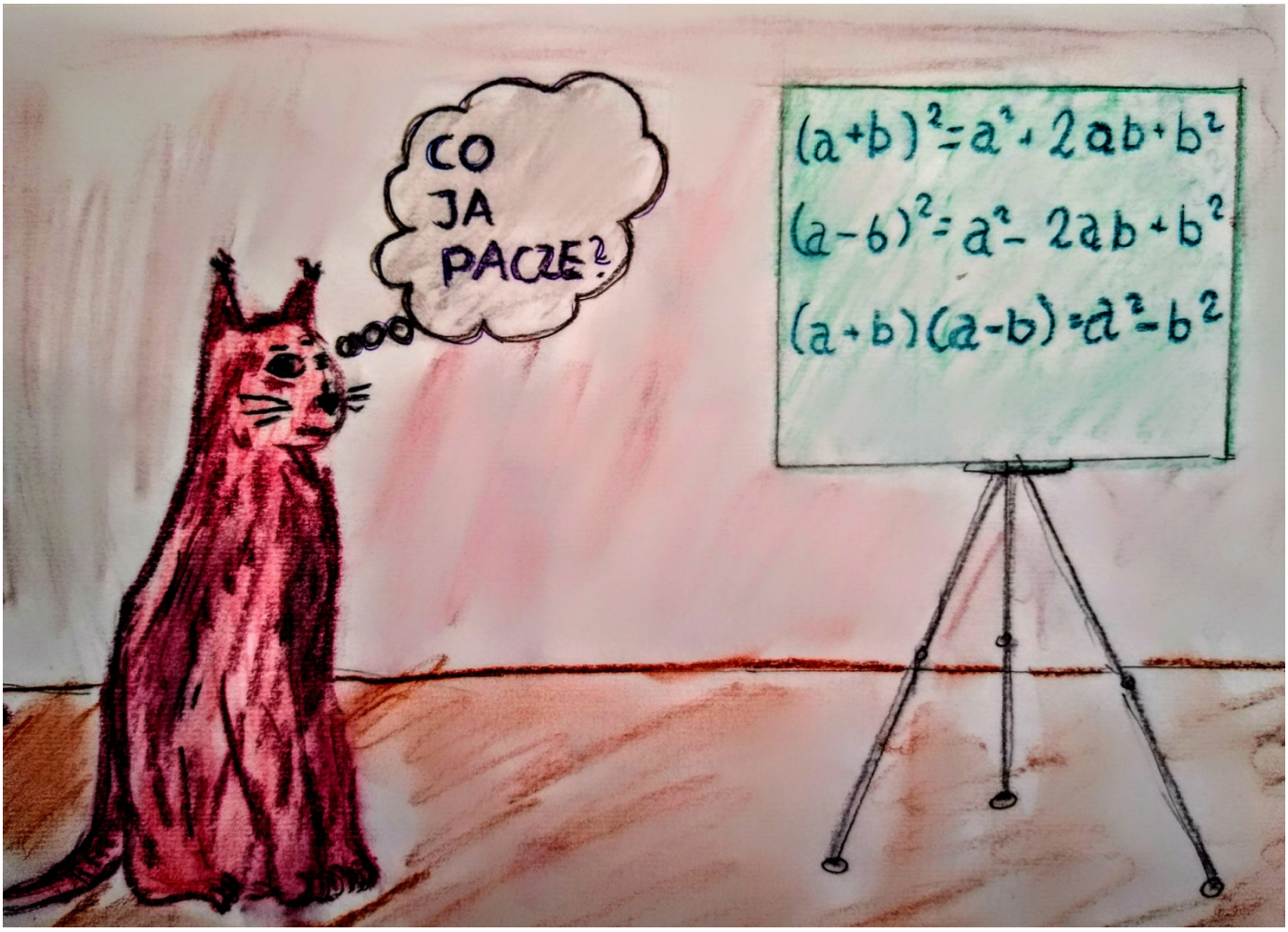
Jeśli będziesz miał **tylko mnożenia**, to możesz je wykonywać w dowolnej kolejności.
Przykład 4: $2 \cdot 13 \cdot 5 = 13 \cdot (2 \cdot 5) = 13 \cdot 10 = 130$:)

Jeżeli – w końcu – w wyrażeniu występuje kilka działań i nie ma nawiasów, to jako pierwsze wykonujemy mnożenie i dzielenie w kolejności ich występowania, a następnie dodawanie i odejmowanie – też w kolejności ich występowania.
Przykład 5: $30 - 2 \cdot 6 + 4 = 30 - 12 + 4 = 18 + 4 = 22$.

Warto grupować częściowe wyniki w pełne 10, 100, …
Przykład 6: $68 - 4 + 7 + 32 - 3 - 6 = 100 - 10 + 4 = 94$

3. Praktyczne wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia

W szkole na pewno zapoznano Cię z następującymi trzema **wzorami skróconego mnożenia**:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – wzór na kwadrat sumy
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – wzór na kwadrat różnicy
$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ – wzór na różnicę kwadratów lub (równoważnie) na iloczyn sumy przez różnicę



Wzory skróconego mnożenie służą nie tylko do tego co zapewne przychodzi Ci do głowy – upraszczania wyrażeń z *x*-ami i *y*-ami. Służą jeszcze co najmniej do dwóch rzeczy:

1. prostszego wykonywania obliczeń,
2. usuwania niewymierności z mianownika.

Ad 1

102^2 najprościej jest obliczyć w następujący sposób, wykorzystując wzór na kwadrat sumy:

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10.000 + 600 + 9 = 10.609$$

39^2 najprościej jest obliczyć w następujący sposób, wykorzystując wzór na kwadrat różnicy:

$$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1.600 - 80 + 1 = 1.521$$

Jak więc widzisz – w powyższych dwóch przypadkach podnosiliśmy do kwadratu, wcale nie wymnażając danej liczby przez nią samą.

Poniżej pokażę Ci jak uzyskać wynik mnożenia przez siebie dwóch różnych liczb, również wcale ich przez siebie nie wymnażając. Do tego celu wykorzystam trzeci w wyżej przytoczonych wzorów skróconego mnożenia:

$$17 \cdot 23 = (20 - 3) \cdot (20 + 3) = 20^2 - 3^2 = 400 - 9 = 391$$

Jak więc widzisz: jak matematyk ma „skrzynkę” z odpowiednimi narzędziami (wzorami), to potrafi je wykorzystać wtedy gdy będą one mogły być mu przydatne. ☺

Ad 2

Co to jest niewymierność? – to po prostu liczba niewymierna, zwykle wyrażona za pomocą pierwiastka. Matematycy unikają jej w mianowniku, w ogóle „jak diabeł święconej wody”. W naturalny sposób powstają tu dwa pytania:

a) dlaczego?

b) jak temu zaradzić?

Ad a)

Być może pamiętasz ze szkoły, że jak masz podzielić 12,7 przez 3,42 – to musisz poprzesuwać przecinki w obydwu tych liczbach w prawo o tyle miejsc, ile jest cyfr po przecinku w drugiej z nich (czyli w dzielniku) i dopiero wtedy dzielić. Otóż:

- kiedy od razu jest to liczba całkowita – nie musisz nic z nimi robić;
- gdy jest to liczba o skończonej liczbie cyfr po przecinku – postępujemy jak to wyżej podano;
- gdy jest to liczba z ułamkiem okresowym – wówczas zawsze liczbę tę da się zamienić na ułamek właściwy lub niewłaściwy i postępujemy – jak poniżej podaję na przykładzie:

  $$12{,}7 : 1{,}(3) = 12{,}7 : \frac{4}{3} = 12{,}7 \cdot \frac{3}{4} = 38{,}1 : 4$$ – i dalej jak podano powyżej
- gdy zaś dzielimy przez liczbę niewymierną, to już nie można zrobić takiego „myku" jak bezpośrednio wyżej (bo nie da się ona zapisać w postaci ułamka) – a zatem (ze względu na niemożność przesunięcia przecinka o odpowiednią liczbę miejsc w prawo, bo by musiało to być nieskończenie wiele miejsc!) dzielenie pisemne wydaje się być wtedy niewykonalne. Na szczęście jednak tak nie jest, i o tym właśnie podaję poniżej!

Ad b)

Celem usunięcia niewymierności z mianownika, w zależności od zastanej sytuacji, stosujemy jeden z poniższych trzech „myków":

- gdy w mianowniku mamy PIERWIASTEK z jakiejś liczby: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ – jak więc widzisz, pomnożyłem całe wyrażenie przez 1 wyrażone w postaci ułamka $\frac{mianownik\ dotychczasow\quad ułamka}{mianownik\ dotychczasowego\ ułamka}$, i w wyniku stosownego mnożenia owych ułamków otrzymaliśmy ułamek, który w mianowniku nie mam już niewymierności (to że w liczniku będzie nieskończenie wiele miejsc po przecinku, nie ma tu większego znaczenia w kwestii wykonania tego dzielenia, gdyż po prostu weźmiemy tylko kilka owych miejsc i wykonamy dzielnie w pewnym zaokrągleniu, ale wtedy będzie chociaż ono w ogóle wykonalne!);
- gdy w mianowniku mamy SUMĘ, której co najmniej jeden ze składników ma pierwiastek:

  $$\frac{2}{1+2\sqrt{3}} = \frac{2}{1+2\sqrt{3}} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}} = \frac{2(1-2\sqrt{3})}{1^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{2(1-2\sqrt{3})}{1-12} = \frac{2(1-2\sqrt{3})}{-1},$$

  czyli pomnożyliśmy przez 1 w postaci „to samo wyrażenie co było dotychczas w mianowniku, jednak ze znakiem minus, a nie plus między składnikami PRZEZ to samo wyrażenie", a następnie wymnażając mianowniki, stosujemy nasz trzeci wzór skróconego mnożenia;
- analogicznie postępujemy, gdy w mianowniku mamy RÓŻNICĘ, której co najmniej jeden ze składników ma pierwiastek:

  $$\frac{2}{1-2\sqrt{3}} = \frac{2}{1-2\sqrt{3}} \cdot \frac{1+2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}} = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{1^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{1-12} = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{-11},$$

  czyli pomnożyliśmy przez 1 w postaci „to samo wyrażenie co było dotychczas w mianowniku, jednak ze znakiem plus, a nie minus między składnikami PRZEZ to samo wyrażenie", a następnie wymnażając mianowniki stosujemy nasz trzeci wzór skróconego mnożenia.

VIII. POTRÓJNA ZALEŻNOŚĆ, CZYLI POTĘGI, PIERWIASTKI I … LOGARYTMY

1. Potęgi i potęgowanie

Potęgowanie jest uogólnieniem wielokrotnego mnożenia. Ogólnie, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ – a występuje n razy (a zatem mnożeń a mamy o 1 mniej, tj. $n - 1$). Zapis a^n czytamy a podniesione do potęgi n-tej lub krócej: a do potęgi n-tej. Drugą potęgę nazywamy **kwadratem**, a trzecią – **sześcianem** danej liczby a. W zapisie $a^n = b$: a to podstawa potęgi, n – jej wykładnik, a b – wynik potęgowania.

Liczba dodatnia podniesiona do dowolnej potęgi daje nam zawsze liczbę dodatnią ($2^3 = 8$, $3^4 = 81$), a liczba ujemna:

- podniesiona po potęgi parzystej – liczbę dodatnią ($(-2)^4 = 16$),
- a do potęgi nieparzystej – liczbę ujemną dodatnią ($(-2)^5 = -32$);

w skrócie możemy powiedzieć, że przy potęgowaniu parzysta liczba minusów się znosi.

Potęgowanie ułamków sprowadza się do podniesienia do danej potęgi tak licznika, jak i mianownika ($\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$).

Ponieważ $a^{n+1} = a^n \cdot a$ – podnieść podstawę potęgowania do potęgi o *1* wyższej, oznacza pomnożyć wynik tego potęgowania dodatkowo przez ową podstawę (wynika to wprost z definicji potęgowania) – zatem (otrzymujemy stąd idąc w drugą stronę, że) ilekroć będziemy schodzić z wykładnikiem potęgowania o *1*, wynik owego potęgowania będzie a razy mniejszy.

Omówmy jeszcze podnoszenie do potęgi: *1*, *0* i wyrażonej liczbą ujemną, wykorzystując właśnie dopiero co przytoczony wniosek.

W tym celu rozpatrzmy:

- $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$,
- $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ – a więc 10 razy mniej,
- $10^1 = 10$ – musi być 10 razy mniej niż to, co bezpośrednio wyżej,
- $10^0 = 1$ – musi być 10 razy mniej niż to, co bezpośrednio wyżej,
- $10^{-1} = 0{,}1$ – musi być 10 razy mniej niż to, co bezpośrednio wyżej,
- $10^{-2} = 0{,}01$ – musi być 10 razy mniej niż to, co bezpośrednio wyżej,
- $10^{-3} = 0{,}001$ – musi być 10 razy mniej niż to, co bezpośrednio wyżej.

Wnioskujemy stąd, że: $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$,

przy czym w każdym z tych trzech przypadków przyjmuje się $a \neq 0$:

- dlaczego tak jest w pierwszym przypadku ($a^0 = 1$) – wytłumaczę Ci za chwilę,
- z kolei w dwóch pozostałych przypadkach a występuje w mianowniku – i dlatego właśnie nie może być = 0 (bo – jak wiesz – nie można dzielić przez 0).

Zagadka: ile to jest 0^0?
Z jednej strony, jeśli potęgę tę przedstawilibyśmy jako a^0 – spodziewalibyśmy się wyniku *1*. Z drugiej strony $0^n = 0$, dla dowolnych niezerowych n. Aby nie było sprzeczności – przyjmujemy po prostu, że nie ma czegoś takiego jak 0^0 (analogicznie jak nie ma dzielenia przez zero) lub – równoważnie że 0^0 jest symbolem nieoznaczonym.

Działania na potęgach

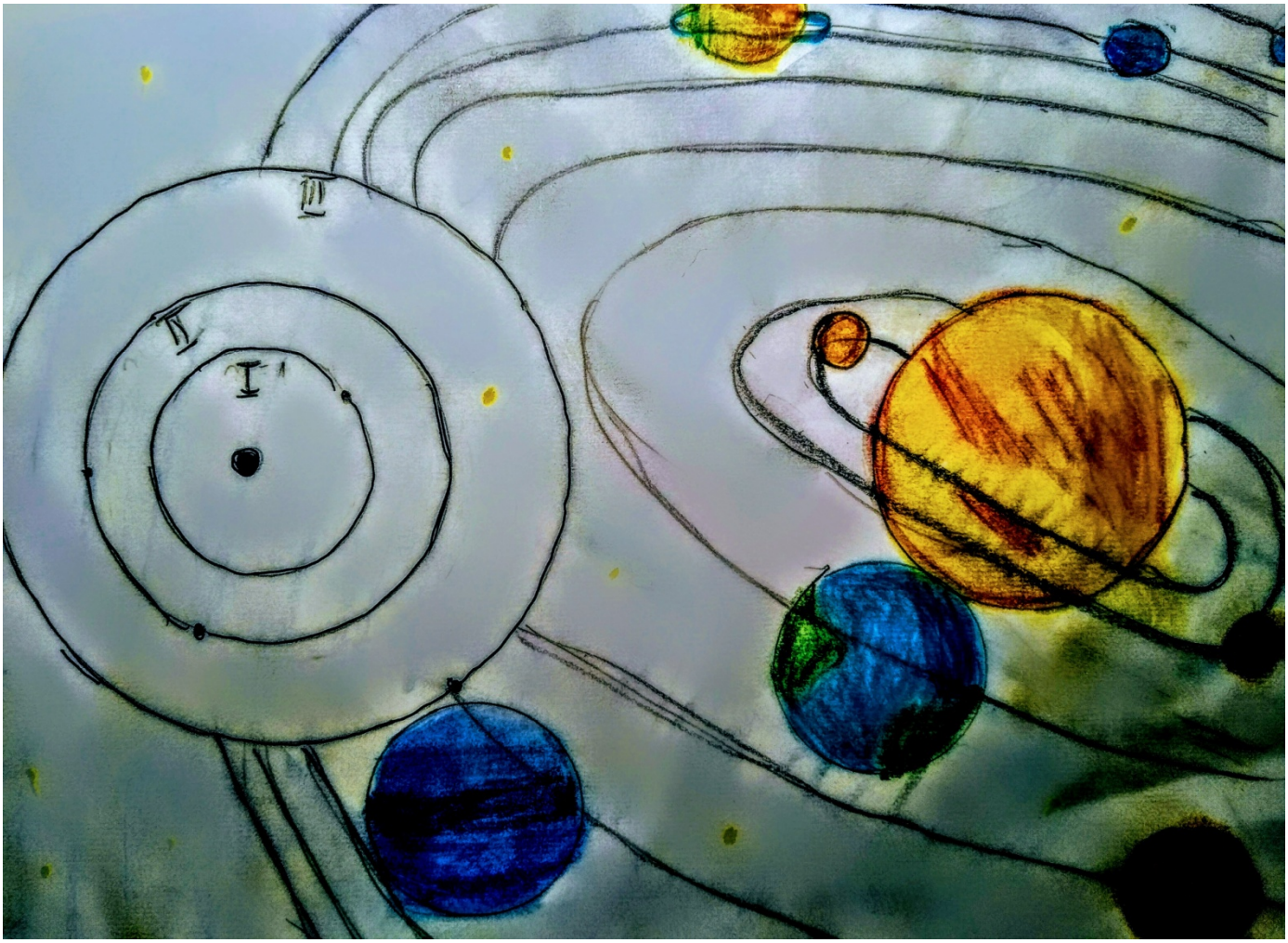
Przy $a, b \neq 0$, zachodzą następujące zależności:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ – wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach,
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ – wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach,

3. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ – wzór na potęgę iloczynu,
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{a^n}$ – wzór na potęgę ilorazu,
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ – wzór na potęgę potęgi.

2. Przedstawienie liczby w postaci wykładniczej

Zapis wykładniczy stosujemy zwykle dla liczb bardzo dużych, czy też bardzo małych (przy czym często stosuje się tu jeszcze dodatkowo zaokrąglenie, ale o tym za chwilę).



RYS – do wielkich obiektów (jak np. układ planetarny) stosujemy wielkie liczby, a do małych obiektów (jak atom) – malutkie liczby.

W zapisie wykładniczym dowolną liczbę *x* różną od *0* zapisujemy w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $1 \leq a < 10$, przy czym *n* jest liczbą całkowitą:

- nieujemną dla $|n| \geq 1$ (a więc dla liczb większych lub równych *1*, czy też mniejszych lub równych *-1*),
- ujemną dla $0 < |x| < 1$ (a więc dla ułamków właściwych – tak dodatnich, jak i ujemnych).

Najpierw jest więc cyfra różna od zera, potem ewentualnie przecinek i po nim kolejne cyfry, a następnie 10 do potęgi liczby całkowitej. Zobaczmy to na konkretnych przykładach:

- $2.345.672 = 2{,}345672 \cdot 10^6$
- $-364{,}726 = -3{,}64726 \cdot 10^2$
- $0{,}0004536293 = 4{,}536293 \cdot 10^{-4}$
- $748.000.000.000 = 7{,}48 \cdot 10^{11}$
- $-0{,}0000126 = -1{,}26 \cdot 10^{-5}$
- $5 = 5 \cdot 10^0$

Chcąc zamienić liczbę w postaci wykładniczej w liczbę w postaci standardowej (a więc działając w drugą stronę), korzystamy z własności, że:

- „· *10* do potęgi *n* dodatniej całkowitej” znaczy przesunąć w danej liczbie przecinek o *n* pozycji w prawo,
- „· *10* do potęgi *n* ujemnej całkowitej” znaczy przesunąć w danej liczbie przecinek o *n* pozycji w lewo,
- „· *10* do potęgi *0*” znaczy pomnożyć przez 1, czyli (właściwie) nic nie robić.

Krócej: wykładnik *n* w potędze 10^n pokazuje nam o ile miejsc w prawo należy przesunąć przecinek (np: 10^5 – *5* miejsc w prawo; 10^{-7} – o *-7* miejsc w prawo, czyli o *7* miejsc w lewo; 10^0 – o *0* miejsc w prawo, czyli w ogóle nie ruszać!).

Zaokrąglenie z zapisem wykładniczym

W pierwszych *3* z powyższych *6* przykładów, możemy zaokrąglić te liczby – zwykle tak zresztą robimy, i to do tego przeważnie do *2* miejsc po przecinku (po zaokrągleniu). W powyższych *3* sytuacjach będziemy więc mieli:

- $2345672 = 2{,}345672 \cdot 10^6 \approx 2{,}35 \cdot 10^6$
- $-364{,}726 = -3{,}64726 \cdot 10^2 \approx -3{,}65 \cdot 10^2$
- $0{,}0004536293 = 4{,}536293 \cdot 10^{-4} \approx 4{,}54 \cdot 10^{-4}$

Można też zrobić to w odwrotnej kolejności: najpierw zaokrąglić liczbę, a następnie zapisać ja w postaci wykładniczej. Np. zamiast podać *257.310.000* – powiemy, że jest to *260* milionów (ewentualnie z dopowiedzeniem „około”), czy też (tak częściej w formie pisemnej): $2{,}6 \cdot 10^8$.

Na koniec zobaczmy jeszcze jak się wykonuje operacje na liczbach zapisanych w postaci wykładniczej:

- $4 \cdot 10^{18} \cdot 8 \cdot 10^6 = 32 \cdot 10^{24} = 3{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{24} = 3{,}2 \cdot 10^{25}$
- $4 \cdot 10^{12} \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 24 \cdot 10^9 = 2{,}4 \cdot 10 \cdot 10^9 = 2{,}4 \cdot 10^{10}$
- $4{,}5 \cdot 10^{20} + 2{,}7 \cdot 10^{23} = 0{,}0045 \cdot 10^{23} + 2{,}7 \cdot 10^{23} = 2{,}7045 \cdot 10^{23}$

UWAGA!
Warto wiedzieć, że zamiast pisać $1 \cdot 10^5$ można po prostu napisać 10^5 – będzie to ta sama liczba, lecz (formalnie rzecz biorąc) nie będzie ona w podana w zapisie wykładniczym, bo nie podpada pod definicję takiego zapisu (podaną na początku tego paragrafu).

Poniższa tabela przedstawia nazwy liczb (dla sposoby stosowanego w Polsce, w języku angielskim jest inaczej!), ich zapis w postaci dziesiętnej oraz zapis w postaci potęgi liczby *10*. Przy tym:

- liczby pogrubione mają parzystą liczbę trojek zer (tj. mamy w nich: *0, 6, 12, 18*, … zer) i (z wyjątkiem liczby *0*) ich nazwa kończy się na „-lion”
- liczby, które nie są pogrubione (z wyjątkiem *10* i *100*), są jednostkami pośrednim, i występuje w nich nieparzysta liczba trójek zer (tj. mamy w nich zer) i ich nazwa kończy się na „-liard”

jeden	***1***	$\boldsymbol{10^0}$
dziesięć	*10*	$\boldsymbol{10^1}$
sto	*100*	$\boldsymbol{10^2}$
tysiąc	*1 000*	10^3
milion	***1 000 000***	$\boldsymbol{10^6}$
miliard	*1 000 000 000*	10^9
bilion	***1 000 000 000 000***	$\boldsymbol{10^{12}}$
biliard	*1 000 000 000 000 000*	10^{15}
trylion	***1 000 000 000 000 000 000***	$\boldsymbol{10^{18}}$
tryliard	*1 000 000 000 000 000 000 000*	10^{21}
kwadrylion	***1 000 000 000 000 000 000 000 000***	$\boldsymbol{10^{24}}$
kwadryliard	*1 000 000 000 000 000 000 000 000 000*	10^{27}
kwintylion	***1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000***	$\boldsymbol{10^{30}}$

kwintyliard	...	10^{33}
sekstylion	...	$\mathbf{10^{36}}$
sekstyliard	...	10^{39}
septylion	...	$\mathbf{10^{42}}$
septyliard	...	10^{45}
oktylion	...	$\mathbf{10^{48}}$
oktyliard	...	10^{51}
nonilion	...	$\mathbf{10^{54}}$
noniliard	...	10^{57}
decylion	...	$\mathbf{10^{60}}$
decyliard	...	10^{63}
...	**...**	**...**
centylion	...	$\mathbf{10^{600}}$

Jak już jesteśmy przy bardzo dużych liczbach, to jako **CIEKAWOSTKĘ** podajmy jak są nazywane **bardzo duże liczby w różnych językach świata.**

Googol oznacza liczbę 10^{100} (w zapisie dziesiętnym: jedynka i *100* zer). Twórcą tego terminu był Milton Sirotta, a spopularyzował go amerykański matematyk i wuj Sirotty, Edward Kasner. Nazwa najpopularniejszej na świecie wyszukiwarki internetowej „Google" powstała z niepoprawnego (przez przypadek) zapisu słowa „googol" (i tak już zostało!). Wyszukiwarka ta ma bowiem za zadanie przeszukiwanie przeogromnej ilości danych znajdujących się w internecie.

Lakh – to występujące w językach Indii określenie liczby *100.000*. Jest to również synonim „dużej liczby". Sto lakh składa się na **koti** (tym samym, oczywiście: **koti** – to sanskrycki liczebnik, określenie liczby *10.000.000*; jedno koti to sto lakhów).

Miriada – jest to grecki liczebnik główny, który oprócz tego, że oznacza liczbę *10.000* jest też używany w liczbie mnogiej do określania wielkiej liczby, trudnej do policzenia, np. *miriady gwiazd*.

Słowa **tysiąc** i **milion** w językach europejskich oprócz określania konkretnej liczby, są również synonimami „dużej liczby" (np. *miliony obywateli*).

W języku hebrajskim na określenie **nieskończoności** stosuje się liczbę *77*.
W Biblii, w *18* rozdziale Ewangelii wg św. Mateusza, czytamy (cyt. za https://biblia.deon.pl/rozdzial.php?id=261):

> 21 *Wtedy Piotr zbliżył się do Niego i zapytał: «Panie, ile razy mam przebaczyć, jeśli mój brat wykroczy przeciwko mnie? Czy aż siedem razy?»* 22 *Jezus mu odrzekł: «Nie mówię ci, że aż siedem razy, lecz aż siedemdziesiąt siedem razy.*

co oznacza, że **zawsze** trzeba przebaczać.

Z kolei **w języku polskim mamy też specyficzne nazwy na określanie niektórych** (konkretnych, mniejszych niż te podane powyżej) **liczb**:

0 – null, jajo (obie nazwy żargonowe)
¼ – ćwiartka, ćwierć
½ – połówka, pół
[w języku rosyjskim jest nadto określenie na *1/3* – trjet']
1 ½ – półtora
12 – tuzin,
15 – mendel
60 – kopa
144 – gros

Przypatrzmy się bliżej *4* ostatnim z nich i zależnością między nimi:

1. **Tuzin** – to inna nazwa liczby dwanaście, zwykle używana w kontekście liczby sztuk (np. tuzin jajek). Słowo to pochodzi od łacińskiego *duodecim*. Pięć tuzinów (*60*) to kopa, zaś dwanaście tuzinów (*144*) to gros.
   W nielicznych krajach tuzin używany jest w przy definiowaniu oficjalnych jednostek miar (np. w USA stopa liczy tuzin cali). Użycie *12* jako podstawy systemu liczbowego prawdopodobnie pochodzi z Mezopotamii (możesz je spotkać np. na tarczy zegara).
2. **Mendel** – nieużywane już powszechnie inne określenie *15* sztuk, czyli *¼* kopy, stosowane w Polsce od XIV wieku. Określenie stosowano w odniesieniu do produktów rolnych, np. jajek. Określenie to bywa jeszcze spotykane na bazarach.
3. **Kopa** – w Polsce w XVII-XIX w. liczba *60* sztuk = *4* mendle = *5* tuzinów (najczęściej nazwa odnoszona do sztuk, ale także w powiedzeniu „kopę lat"), była stosowana do obliczania zbiorów rolnych (snopów).
   Ponadto w średniowiecznej Polsce kopa była to jednostka obrachunkowa dla monet, równa np. *60* groszom praskim.
4. **Gros** (staropolskie: tuzin tuzinów) – inna nazwa liczby *144*, zwykle używana w kontekście liczności – np. gros jajek.

3. Pierwiastki i pierwiastkowanie

O pierwiastkach i pierwiastkowaniu powiem krótko. Pierwiastkowanie (za pomocą pierwiastków) jest operacją odwrotną do potęgowania, tj. znosi się z nim, podobnie jak:

- dodawanie i odejmowanie: *20 – 3 + 3 = 20, czy 20* + 3 – 3 = 20
- mnożenie i dzielenie: *18 : 3 · 3 = 18*, czy *18 · 3 : 3 = 18*

W przypadku pierwiastkowania i potęgowania mamy mianowicie:

$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$, jak i $\sqrt{4}^2 = 2^2 = 4$

$\sqrt[3]{4^3} = 4$, jak i $\sqrt[3]{4}^3 = 4$

Nieważna jest więc tu kolejność: najpierw potęgowanie, a potem pierwiastkowania, czy odwrotnie – byle były to operacje tego samego stopnia (tu odpowiednio: *2* i *3*).

Jednak – odnosząc się do powyższego przykładu a), jednak zamiast *4* biorąc *MINUS 4* – mamy:

- $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ – tutaj *MINUS 4* nie sprowadziło się do *MINUS 4*, lecz do *4* (a więc mamy „skuchę")
- a w drugą stronę: $\sqrt{-4}^2$ w ogóle nie istnieje! (bo nie ma pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej – żadna liczba podniesiona do kwadratu nie daje liczby ujemnej).

– dlatego właśnie na początku tego paragrafu napisałem „podobnie jak", a nie „identycznie jak".

Zważywszy, że $\sqrt{4^2} = 4$ i że $\sqrt{(-4)^2} = 4$ – możemy napisać, że $\sqrt{a^2} = |a|$ (wartość bezwzględna z a).

Z kolei $\sqrt{a}^2 = a$ (nie ma ty więc już wartości bezwzględnej), jednak musi być $a \geq 0$ (bo inaczej w ogóle ten pierwiastek by nie był określony).

Na pierwiastki stosują się analogiczne **wzory** co na potęgi:
Przy $a, b \neq 0$, zachodzą następujące zależności:

1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a}$ – wzór na iloczyn pierwiastków z tych samych liczb
2. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m-n]{a}$ – wzór na iloraz pierwiastków z tych samych liczb
3. $\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ – wzór na pierwiastek iloczynu
4. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ – wzór na pierwiastek ilorazu
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ – wzór na pierwiastek z pierwiastka

4. Pozostały nam jeszcze… logarytmy i (oczywiście) logarytmowanie

Formalnie, $log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$ (co czytamy: logarytmem o podstawie *a* z liczby *b* nazywamy taką liczbę *c* do której należy podnieść liczbę *a*, by otrzymać liczbę *b*). Logarytm jest więc potęgą, do której należy podnieść podstawę logarytmu, by otrzymać liczbę logarytmowaną.

Na logarytmach mają zastosowanie następujące **wzory**:

1. $log_a a = 1$ (bo $a^1 = a$)
2. $log_a 1 = 0$ (bo $a^0 = 1$)
3. $log_a(bc) = log_a b + log_a c$
4. $log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c$

   } wzory na iloczyn i iloraz liczby logarytmowanej

5. $log_a b^n = n \cdot log_a b$
6. $log_a b^{-1} = -log_a b$

   } 2 wzory na potęgę liczby logarytmowanej

7. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$
8. $log_a b = \frac{1}{log_b a}$

   } 2 wzory na zamianę podstawy logarytmowania

Po co nam logarytmy?

Poniżej podam kilka praktycznych zastosowań logarytmów:

1. Pierwotnie logarytmów używano do mnożenia dużych liczb (właśnie z tą myślą powstały! – do obliczeń wartości kosmicznych, i to rozumianych jako takie w sensie dosłownym /= astronomicznych/, jak i przenośnym /= dużych/). Wynikało to z faktu, że logarytm z iloczynu jest sumą logarytmów, co umożliwiało zamianę iloczynu na prostsze do przeprowadzenia dodawanie. Osoba chcąca pomnożyć dwie duże liczby, znajdowała w tablicach ich logarytmy, a następnie dodawała je, a na koniec – znowu dzięki owym tablicom – zamieniała wynik z logarytmu na wartość owego iloczynu. Wspomniane tu, wcześniej przygotowane z dużą dokładnością, tablice logarytmiczne, przez długie lata były podstawową pomocą do obliczeń naukowych, geodezyjnych, astronomicznych i inżynierskich. Z kolei do obliczeń przybliżonych, jeszcze w II połowie XX wieku, inżynierowie na co dzień wykorzystywali specjalne urządzenia, zwane suwakami logarytmicznymi. Obecnie, tablice logarytmiczne wykorzystuje się w szkole, a suwaki logarytmiczne przeszły do lamusa, jako że zostały wyparte przez kalkulatory, komputery i smartfony (z aplikacją kalkulatora).
2. Poziom natężenia dźwięku jest funkcją logarytmiczną natężenia dźwięku. Skala natężenia dźwięku korzysta z **Beli** (przy czym na co dzień używa się właściwe ich krotności – **decybeli**), czyli jednostki logarytmicznej. Konkretnie, wzrost natężenia dźwięku o *10* Beli oznacza *10*-krotny wzrost jego natężenia.
3. W chemii stosuje się logarytmy przy okazji liczenia pH roztworu wodnego związku chemicznego, czyli stężenia jonów wodorowych w roztworze.
4. Ponieważ logarytm jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej, dlatego przydaje się wszędzie tam, gdzie rozwiązuje się równanie wykładnicze – np. do przewidzenia liczby rat kredytu albo czasu, kiedy rozpad promieniotwórczy doprowadzi do danego stężenia pierwiastka, itp.
5. W sejsmologii logarytmicznie wyskalowana jest skala Richtera…

Jak widać – wspomniane tu skale logarytmiczne są szeroko stosowane w nauce i technice. Wykorzystuje się je dla odwzorowania wielkości, które przyjmują wartości z szerokiego zakresu. Skala logarytmiczna jest w pewnych zastosowaniach skalą naturalną, ze względu na to, że zmysły człowieka reagują na bodźce właśnie w sposób logarytmiczny, a nie liniowy.

Na koniec dodajmy jeszcze, że skala logarytmiczna musi bazować na określonej podstawie logarytmu (zwykle jest to liczba *10* lub liczba *e* – podstawa logarytmu naturalnego równa w przybliżeniu *2,71*) i odnosić się jedynie do wartości dodatnich (bo i logarytmy określone są tylko dla liczb dodatnich).

IX. PROCENTY

1. Procenty rozpatrywane na liczbach

1) DEFINICJA
Procent – znaczy setna część.
Tak więc *1 % = 1/100*
Stąd:

- *5 % = 5/100 = 1/20*
- *20 % = 20/100 = 1/5*
- *50 % = 50/100 = ½*
- *73 % = 73/100 = 0,73*
- *75 % = 75 / 100 = ¾*
- *100 % = 100/100 = 1*
- *300 % = 300/100 = 3*

2) Oblicz *30 %* z *200.*
Powyższe „z" – to raZy
30 % · 200 = 0,3 · 200 = 60 .

Metoda proporcji:
200 – 100 %
x – 30 %

x · 100 % = 200 · 30 % | :100%
x = 60

3) Ja mam *50* lat, a Ty *20*.
a) Twój wiek – to jaki procent mojego?
20/50 = 0,4 – to taka część
20 /50 · 100 % = 40% – to tyle procent

20 – x
50 – 100 %

50 · x = 20 · 100 % | :50
x = 20 · 2 % = 40 %

b) Twój wiek – to jaki procent mojego?
50/ 20 · 100 % = 2,5 · 100% = 250 %

4) Przy danych jak wyżej
a) o ile procent jestem od Ciebie straszy?
250 % – 100 % = 150 %
b) o ile procent Ty jesteś ode mnie młodszy?
100 % – 40 % = 60 %

2. Procenty w sklepie – podwyżki i obniżki cen towarów; VAT – cena brutto, netto i tara; prowizja i narzut

1) W całej Polsce masło ma podrożeć o *20 %*. Jak obliczyć nową jego cenę?
x – dotychczasowa cena masła
0,2 x – podwyżka o *20 %*
x + 0,2 x = 1,2 x – nowa cena masła

2) w sklepie odzieżowym mają wyprzedaż: „wszystko *30 %* taniej”. Jak obliczysz nową cenę?
x – dotychczasowa cena danego towary
$0,3\,x$ – jej obniżka
$x - 0,3\,x = 0,7\,x$ – nowa cena towaru

Zwróć uwagę na fakt, że gdy widzisz w sklepie napis „obniżka do *50 %*” – oznacza to, że cena żadnego towaru nie będzie obniżona o więcej niż *50 %*. być może największa obniżka wynosi *20 %*. Widzisz więc, jak łatwo jest dać się nabrać (z równym powodzeniem mogli napisać „obniżka do *90 %*” – też by nie okłamali, a jak o wiele lepiej by to brzmiało ;)).

3) W sklepie jest promocja „Taniej o VAT” (który wynosi 23 %). Jak obliczysz nowe ceny?
Jeśli myślisz, że „zdejmując” z ceny *23 %* – to jesteś w błędzie! Wtedy nowa cena by wynosił 0,77 starej... !
x – dotychczasowa cena netto
$x \cdot 1,23$ – dotychczasowa cena brutto („metkowa”) $= y$
x – nowa cena metkowa
$x / 1,23\,x = 0,813$ – taką część dotychczasowej przyjmie nowa cena (zdejmujesz więc *18,7* %)
$0,813\,y$ – nowa cena (po zdjęciu VAT)

4) Podczas kampanii prezydenckiej dotychczasowy pan prezydent starający się o reelekcję zapowiedział, że VAT na musztardę spadnie z *8* do *5 %* – żeby rodziny się z tego cieszyły i by (w tej wielkiej radości) oddać na niego swój głos. Ile podczas jego *5*-letniej nowej kadencji zaoszczędzi na musztardzie *4*-osobowa rodzina, skoro miesięcznie zużywa 1 musztardę, a ta dotychczas kosztowała *3,24* zł?
x – cena netto
3,24 zł = *1,08* x
stąd: $x = 3$
$1,05\,x = 3,15$ zł.
Miesięcznie rodzina oszczędza więc *3,24* zł - *3,15* zł = *0,09* zł
0,09 zł · *12* = *1,08* zł – ich roczna oszczędność
1,08 zł · *5* = *5,40* zł – tyle zaoszczędzą przez całą kadencję prezydenta
5,40 zł /*4* = *1,35* zł – tyle oszczędności przypadnie przez całą 5-letnią kadencję na każdego z członków rodziny.
Zastanów się, czy za taką kwotę warto się sprzedać (o ile jesteś z innej opcji politycznej niż pan prezydent).

Narzut – to kwota lub procent jaki przy sprzedaży dodaje sklep do ceny zakupu towaru.
Prowizja – to zysk od sprzedaży towaru (też jest liczona kwotowo lub procentowo).
Różnicę między narzutem a prowizją stanowią **koszty** sklepu.

Co to jest brutto, netto i tara?
Mnie w szkole uczyli tak:
WAGA **netto** – to waga cukierków, **tara** – to waga opakowania, **brutto** – to waga cukierków z opakowaniem.
Aby odważać w torebce cukierki bez wagi torebki – sprzedawca najpierw „taruje” wagę – tzn. zeruje ją gdy jest na niej tylko pusta torebka, a następnie waży cukierki (w torebce, ale bez wagi torebki).

Odnieśmy teraz to do cen towarów:
- **netto** – to cena towar bez podatku VAT (podatku od wartości dodanej),
- **tara** – to ten podatek (w Polsce – w zależności od rodzaju towaru – wynosi on *0, 5, 8* i *23 %*),
- **brutto** – to cena tego towaru wraz z tym podatkiem.

Jeśli przy stawce *23 %* VAT towar kosztuje w sklepie *123* zł – to:
1) *123* zł – to jest jego cena brutto,
2) *100* zł – to jest jego cena netto (to zostawia sobie sprzedawca „w kieszeni”)
3) *23* zł – to jest tara, czyli ów VAT (to sprzedawca spłaci Państwu).

6) Towar w sklepie potaniał o *20 %*, a potem jeszcze o *30 %*. O ile procent w sumie staniał?
x – pierwotna cena towaru
$0,8\,x$ – cena towaru po pierwszej obniżce
$0,7 \cdot 0,8\,x = 0,56\,x$ – cena towaru po *2* obniżkach, a więc w sumie staniał o $0,44\,x$, a więc o *44 %*

Zwróć uwagę na fakt, że te obniżki procentowe się nie sumują! (obniżka o *20 %* i potem o *30 %* – to nie obniżka o *50 %*, lecz o *44 %*!).

7) Towar podrożał o *25 %*. O ile procent musi stanieć, by jego cena wróciła do pierwotnej wartości?
x – pierwotna cena towaru
1,25 x – cena towaru po podwyżce o *25 %*
x – końcowa cena towaru
0,25 x - o tyle musi stanieć; poniżej liczę ile to procent:
(0,25 x / 1,25 x) · 100 % = 0,2 · 100 % = 20 % – o tyle procent musi stanieć towar

Zwróć uwagę, że jest to ta sama sytuacja co z porównywaniem wieku:
jeśli ja mam *25* lat, a Ty *20* – to ja jestem od Ciebie o *25 %* starszy, a Ty jesteś ode mnie o *20 %* młodszy.

8) Towar kosztował *5,82* zł. Teraz kosztu je *3,49* zł. O ile procent staniał?
a) I metoda:
3,49 zł / 5,82 zł = *0,5997* – zatem towar staniał o *40,03 %*
Zapewne chodziło o obniżkę o *40 %*. Sprawdźmy: *5,82* zł · *0,6* = *3,492* zł = (z dokł. do *1* gr) *3,49* zł
II metoda:
3,49 zł – *x*
5,82 zł – *100 %*
Stąd: *x = (3,49* zł · *100 %) / 5,82* zł *= 0,5997*, i dalej kontynuujemy jak powyżej

3. Procenty w bankach – pożyczki i lokaty

Zacznijmy od **LOKAT**.
Podstawowe pojęcia:

- **kapitał początkowy** - kwota, jaką składasz do banku jako lokatę (np. *10.000* zł)
- **oprocentowanie roczne** - oprocentowanie liczone od kapitału w skali roku (np. *8 %*)
- **okres kapitalizacji** - czas po jakim naliczone odsetki dopisywane są do kapitału (może być: na koniec czasu lokaty, co rok /zwykle tak jest!/, co *2* lata, ...,; ale i co pół roku, co kwartał, co *2* miesiące, co miesiąc, co pół miesiąca, co tydzień, codziennie)
- **stopa kapitalizacji** - oprocentowanie w jednym okresie kapitalizacji; przy oprocentowaniu rocznym *8 %* – wynosi ona:

Okres kapitalizacji	*1* rok	*2* lata	*3* lata	*6* mies.	*3* mies.	*2* mies.	*1* mies.	*1* tydz.
Stopa kapitalizacji	*8 %*	*8% · 2 =16 %*	*8% · 3 =24 %*	*8% : 2 = 4 %*	*8 % : 4 = 2 %*	*8 % : 6 ≈ 1,33 %*	*8 % : 12 ≈ 0,67 %*	*8 % : 52 ≈ 0,154 %*

- **rzeczywiste roczne oprocentowanie** - przy obecnym sposobie wysokości i sposobu liczenia oprocentowania, jakie powinno być roczne oprocentowanie z roczną kapitalizacją odsetek, abyś w sumie otrzymał taką samą kwotę
- **rzeczywista roczna stopa oprocentowania** - liczona przy pożyczkach, pokazująca jaka jest efektywna stopa oprocentowania kredytu, uwzględniająca nie tylko oprocentowania kredytu, ale i wszelkie opłaty dodatkowe (jak np. opłata przygotowawcza, opłata za rozpatrzenie wniosku, prowizja i wszelkie inne jakie tylko przyjdą bankowcom do głowy).

Pieniądze do banku możesz złożyć teoretycznie na *4* sposoby:
A) Na procent prosty, z wypłatą całości na koniec okresu lokaty.
B) Na procent prosty, z wypłatami rentierskimi co stały okres i ze zwrotem kapitału na koniec okresu lokaty.
C) Na procent składany, z wypłatą całości na koniec okresu lokaty.
D) Na procent składany, z wypłatami rentierskimi co stały okres i ze zwrotem kapitału na koniec okresu lokaty.

Procent prosty - to procent raz obliczony od kapitału początkowego i w takiej wysokości doliczany do kapitału na koniec każdego kresu procentowego.

Przykłady:

1) Składamy *1.000* zł do banku. Oprocentowanie roczne wynosi *10 %*, co znaczy, że co rok jesteśmy bogatsi o *10 %* od *1.000* zł, tj. o *10 % · 1.000* zł = *0,1 · 1.000* zł = *100* zł. Po roku mamy więc o *100* zł więcej, a więc *1.100* zł, po kolejnym roku - o kolejne *100* zł więcej, tj. *1.200* zł, ...; ogólnie: po *n* latach: *1.000* zł + *n · 100* zł

Przy tym, w opcji A) - całą tak obliczoną kwotę (kapitał początkowy + doliczone odsetki) byśmy mieli wypłaconą na koniec zadeklarowanego okresu (np. *3* lat), a w opcji B) - co rok byśmy mieli wypłacane odsetki (a więc *100* zł), a dodatkowo na koniec kapitał (*1.000* zł).

2) Składamy *1.000* zł na kwartał przy oprocentowaniu rocznym *10 %*. Wtedy po kwartale otrzymamy – zgodnie z podkreślonym powyżej wzorem – *1.000* zł + *1/4 · 100* zł = *1.000* zł + *25* zł = *1.025* zł.

Procent składany – to procent liczony od kapitału zwiększonego o procent, co każdy okres rozrachunkowy.

Najprościej będzie, jak rozpatrzymy to na poniższym przykładzie:

Wpłacamy *1.000* zł do banku na *10 %* w skali roku, na *3* lata, na procent składany,

- *1.000* zł – tyle mamy "na wejściu"
- *1.000* zł · *10 %* = *1.000* zł · *0,1* = *100* zł – tyle zarobiliśmy w I roku i o tyle właśnie zwiększa się nam kapitał na koniec I roku: *1.000* zł + *100* zł = *1.100* zł
- *1.100* zł · *10 %* = *1.100* zł · *0,1* = *110* zł – tyle zarobiliśmy w II roku i o tyle właśnie zwiększa się nam kapitał na koniec II roku: *1.100* zł + *110* zł = *1.210* zł
- *1.210* zł · *10 %* = *1.210* zł · *0,1* = *121* zł – tyle zarobiliśmy w III roku i o tyle właśnie zwiększa się nam kapitał na koniec III roku: *1.210* zł + *121* zł = *1.331* zł

Zauważ więc, że:

1) co roku dolicza się nam coraz więcej (odpowiednio: *100* zł, *110* zł i *121* zł), bo za każdym razem liczymy to oprocentowanie od coraz to większego kapitału (odpowiednio: *1.000* zł, *1.100* zł i *1.210* zł),

2) w stosunku do analogicznych obliczeń przy procencie prostym, tutaj w pierwszym roku zarobiliśmy akurat tyle samo (bo w międzyczasie nic się nie doliczyło do kapitału), w drugim roku – o *10* zł więcej (bo liczyliśmy *10 %* nie

od *1.000* zł, lecz od *1.100* zł), a w III roku - jeszcze więcej, bo *21* zł (bo tym razem znowu nie liczyliśmy *10 %* od *1.000* zł, lecz już od *1.210* zł)

3) Powyższe obliczenia można uprościć. Doliczenie *10 %* sprowadza się bowiem do pomnożenia przez *1,1* (a *23 %* przez *1,23*). Tym samym mamy: $\underbrace{\underbrace{\underbrace{1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}1}_{\text{po I roku}} \cdot 1{,}1}_{\text{po II roku}} \cdot 1{,}1}_{\text{po III roku}} = 1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}1^3 = 1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}331 = 1.331 \text{ zł}$

A co jeśli będą inne okresy rozrachunkowe? Rozpatrzmy w tym celu kolejny przykład:

W tym celu weźmy znowu *1.000* zł i oprocentowanie w wysokości *8 %* w skali roku. Tym razem kapitalizację weźmy jednak kwartalną. Oznacza to, że w skali kwartału jest to *4* razy mniej, czyli *2 %*. Nasz mnożnik wynosi więc *1,02*. Zobaczmy jak to teraz będzie się przekładało na różne okresy:

1) Lokujemy pieniądze na rok. Po roku otrzymamy: $1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}02^4 = 1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}08243216 \approx 1.082{,}43$ zł, a więc nieco więcej niż gdyby indeksacja była *1*-roczna lub (tu: równoważnie) mielibyśmy procent stały, gdyż wtedy doszło by *8 %*, czyli *80* zł.

2) Lokujemy pieniądze na *3* lata. Ponieważ daje nam to *12* okresów kapitalizacyjnych, po tym okresie otrzymamy: $1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}02^{12} = 1.000 \text{ zł} \cdot 1{,}26824179 \approx 1.268{,}24$ zł, a więc nie więcej w stosunku do oprocentowania z procentem prostym o *2,43* zł (jak było powyżej w ciągu roku) razy $3 = 7{,}29$ zł, lecz aż o $268{,}24 \text{ zł} - 3 \cdot 80 \text{ zł} = 28{,}24$ zł. To jest właśnie siła procentu składanego!

Od razu zauważmy tu, że jako że $1{,}02^{12} = (1{,}02^4)^3 = (1{,}08243216)^3 = 1{,}26824179$ - przy danym **nominalnym oprocentowaniu rocznym** (tu: *8 %*) można policzyć ile wynosi **oprocentowania składane w skali roku** (tu: ok. *8,24 %* – jest to wspomniane wyżej rzeczywiste roczne oprocentowanie) i następnie je właśnie uwzględniać do obliczeń wieloletnich.

A teraz mam dla Ciebie **zagadkę** w drugą stronę! Jeśli rzeczywiste roczne oprocentowanie przy kapitalizacji miesięcznej wynosi *10 %*, to ile procent wynosi to oprocentowania nominalnie przy rocznym procencie prostym?

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 1{,}1 \quad \Big|\sqrt[12]{}$$

$$1 + \frac{x}{100} = 1{,}00797414$$

Stąd $x = 0{,}797414$, a $12x \approx 9{,}57$ (i to jest właśnie odpowiedź).

Sam spróbuj odpowiedzieć sobie na pytania, dlaczego akurat tak należało to liczyć.

Oczywiście w opcji C) ów procent się kumuluje, a w opcji D) niestety nie, gdyż nie ma co się kumulować (bo to co narosło, za każdym razem od razu wypłacamy).

Pozostało nam tu jeszcze omówić **POŻYCZKI**.

Z pożyczkami, choć podobnie jak z lokatami, to jednak jest bardziej skomplikowanie.... :(

Po pierwsze, na wejściu możesz zapłacić prowizję, opłatę przygotowawczą, opłatę za rozpatrzenie wniosku, ... To wszystko:

- albo płacimy na wejściu (czyli chcąc dostać pieniądze - sami już musimy je mieć!) lub jest
- albo powiększa kwotę naszej pożyczki i oprócz niej musimy to też spłacać w ratach (oczywiście te opłaty te są wtedy oprocentowane).

Nieraz bank wymaga też:

- podpisania weksla (dokumentu pozwalającego bankowi ściągnięcia z nas pieniędzy poprzez komornika bez sięgania po to do sądu),
- przyprowadzania poręczycieli, gwarantów czy żyrantów,
- ubezpieczenie tej pożyczki (z góry czy też poprzez doliczenie tej kwoty do pożyczki i ściąganie z niej procentów!),
- zaświadczeń z miejsca pracy, deklaracji o dochodach, umożliwienia wejrzenia do BIKu, ...

jak więc widzisz, uzyskać kredyt (czy pożyczkę) wcale nie jest łatwo.

Nadto często się zdarza, że:

- aby móc wziąć *10.000* zł pożyczki, musisz wykazać się, ze wcześniej coś (np. żelazko) kupiłeś na raty, bo w przeciwnym razie, nie masz pozytywnej historii kredytowej (masz ją „nijaką"); z innej strony spojrzawszy, można by uznać, że na żelazko nie potrzebowałeś kredytu, bo cię było stać (nie jesteś „cieniasem finansowym"), więc tym bardziej bank powinien Ci zaufać („kredyt" znaczy „zaufanie"!), jednak niestety tak się nie dzieje...
- Jak masz zdolność kredytową - to kredytu nie bierzesz (bo cię stać na życie/zakupy bez kredytu), a bank wydzwania i zachęca cię do jego wzięcia; a jak masz mniejsze dochody i gorszą sytuację finansową, to potrzebujesz kredytu, ale bank Ci go wtedy nie udzieli, bo nie masz wtedy zdolności kredytowej (jak więc widzisz - mamy t u do czynienia z tzw. „błędnym kołem"),
- w końcu trudno CI przyprowadzić poręczycieli/gwarantów/żyrantów, bo nikt nie chce ryzykować spłacania nie swoich długów!

Dość już jednak tego narzekania, weźmy się do rozważania rodzajów tych kredytów:
1) kredyt nie oprocentowany, raty *0 %* – najlepszy: ile wziąłeś, tyle dajesz;
2) „do końca roku nie płacisz" – masz odroczony termin płatności pierwszej raty o kilka miesięcy :)
3) „pierwszej raty nie płacisz" (lub: „pierwszych dwóch rat nie płacisz") – według mnie idealna sprawa, bo nigdy nie zapłacę pierwszej raty, czyli żadnej raty nie zapłacę, czyli dostałem kredyt, a nie muszę go spłacać, i „jest gites" :). Tak to jednak wygląda tylko literalnie. W rzeczywistości muszę płacić od drugiej (czy trzeciej) raty, a tę pierwszą (czy pierwsze dwie) bank mi po prostu daruje.
4) „pół teraz, pół za pół roku" – jeśli kredyt jest nieoprocentowany, to też nic nie płacę więcej niż wziąłem, a z II połowy kasy muszę „wyskoczyć" dopiero za pół roku.
5) spłacasz kredyt w ratach malejących: jak wziąłeś *500* zł na *5* miesięcy, to po miesiącu oddajesz *100* zł (kapitału) + *%* od *500* zł; miesiąc później – znowu *100* zł kapitału + *%* ale liczony już tylko od *400* zł, ... – jak więc widzisz kwota kapitału do spłaty maleje Ci liniowo (w stałych odstępach czasu o stałą kwotę), a odsetki które do tego płacisz maleją ci liniowo (tj. o stałą kwotę). Jeśli – dajmy na to – odsetki od pozostałem do spłaty kwoty wynoszą *1%* w skali miesiąca, to Twój grafik spłaty wyglądałby następująco:

LP	Masz do spłaty kapitał	Na koniec miesiąca spłacasz			Zostało Ci do spłaty
		kapitał	odsetki	razem	
1	*500*	*100*	*5*	*105*	*400*
2	*400*	*100*	*4*	*104*	*300*
3	*300*	*100*	*3*	*103*	*200*
4	*200*	*100*	*2*	*102*	*100*
5	*100*	*100*	*1*	*101*	*0*
RAZEM SPŁACIŁEŚ:		*500*	*15*	*515*	

Tutaj różnice między początkowymi a końcowymi ratami są nieznaczne, jednak gdy kredyt jest brany na wiele lat - są one bardzo znaczące. Wtedy mogło by się okazać, że nie stać Cię na opłacanie takich wysokich początkowych rat - i wtedy decydujesz się na:
6) wzięcie i spłacanie kredytu w ratach stałych. Przez pierwszy miesiąc narośnie Ci tyle samo odsetek - po miesiącu spłacisz je w całości, jak i część kapitału, ale mniejszą niż to było powyżej. W wyniki wyniku tego ta Twoja rata będzie trochę niższa niż to miało miejsce powyżej, jednak odsetki liczone do II raty będą ciut większe, bo obliczone od większego pozostałego do spłaty kredytu. W sumie kredyt ten będzie Ci łatwiej pozyskać i łatwiej spłacać, jednak w ogólnym rozrachunku więcej w tej opcji zapłacisz niż w poprzedniej. Zobacz analogiczną dla niego - jak do poprzedniego - symulację:

LP	Masz do spłaty kapitał	Na koniec miesiąca spłacasz			Zostało Ci do spłaty
		kapitał	odsetki	razem	
1	*500,00*	*98,02*	*5,00*	*103,02*	*401,98*
2	*401,98*	*99,00*	*4,02*	*103,02*	*302,98*
3	*302,98*	*99,99*	*3,03*	*103,02*	*202,99*
4	*202,99*	*100,99*	*2,03*	*103,02*	*102,00*
5	*102,00*	*102*	*1,02*	*103,02*	*0*
RAZEM SPŁACIŁEŚ:		*500*	*15,10*	*515,10*	

Widzisz, że tu możesz mieć mniejszą zdolność kredytową (zamiast *105* zł – zaledwie *103,02* zł), jednak w sumie zapłacisz o *0,10* zł więcej). Tak więc "coś za coś" ;)

Taką tabelę laikowi nie jest łatwo zrobić; profesjonaliści wykorzystują do jej stworzenia albo specjalne zwory, albo korzystają w Excelu z funkcji „szukaj wyniku".

4. Procenty w płacach i podatkach od nich (płaca: brutto, netto i tara; progi podatkowe; progi podatkowe a podatek liniowy)

Jak wiesz, istnieje coś takiego jak „koszty pracy". Dajmy na to, że w Polsce ktoś zarabia dokładnie 5 tys. złotych brutto (stan na 3 VI 2021 r.).
Ile wtedy dostanie „na rękę", czyli netto? Ponieważ na różnicę (tarę) składa się wiele składników, najlepiej zrobić to z wykorzystaniem tzw. kalkulatora płacy https://www.money.pl/podatki/kalkulatory/plac/ . Otrzymujmy z niego:

Wynagrodzenie BRUTTO	Wynagrodzenie TARA (czyli koszty po stronie pracownika)							Wynagrodzenie NETTO (tj. „na rekę")
	Ubezpieczenia					Podatek	RAZEM	
	emerytalne	rentowe	chorobowe	zdrowotne	RAZEM			
5.000,00	*488,00*	*75,00*	*122,50*	*388,31*	*1.073,81*	*324,00*	***1.397,81***	***3.602,20***

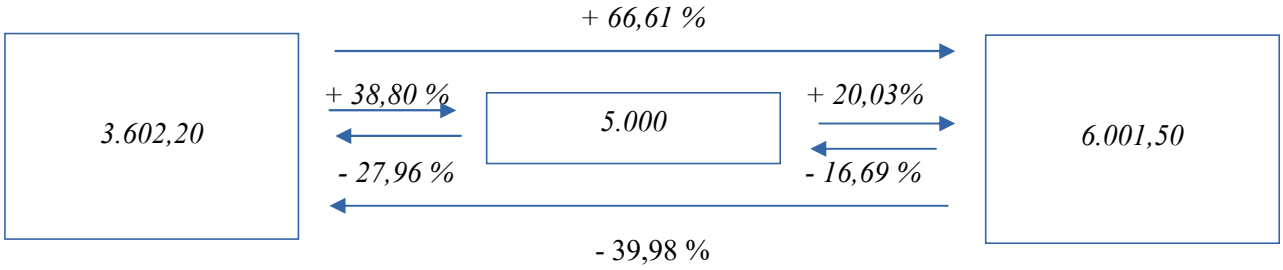
Jak więc widzisz – niby zarabiasz *5.000* zł, a *de facto* „do ręki" (czy raczej na konta) otrzymujesz *3.602,20* zł, czyli *(3.602,20/5.000) · 100% = 72,044 %* owej płacy brutto.

A teraz zobaczmy ile na tę twoją wypłatę musi wyłożyć twój pracodawca. Z tej samej strony otrzymujemy następujący wynik:

Wynagrodzenie pracownika brutto	Dodatkowe koszty pracodawcy								Razem koszty pracodawcy
	Ubezpieczenie pracownika				składki			RAZEM	
	emerytalne	rentowe	wypadkowe	RAZEM	Fundusz pracy	FGŚP	RAZEM		
5.000,00	*488,00*	*325,00*	*83,50*	***896,50***	*100,00*	*5,00*	***105,00***	***1.001,50***	***6.001,50***

Jest to tak zwana (przeze mnie) kwota „brutto-brutto", bo ubruttowieniu (zwiększeniu) uległa kwota, która i tak była już brutto.

Poniżej zobaczmy, jak się mają do siebie kwoty netto, brutto i „brutto-brutto":



A teraz wyobraź sobie, że kupujesz sobie telewizor właśnie za *3.602,20* zł (czyli całą twoją wypłatę netto).
Policzmy ile kosztuje ten telewizor netto, a ile wynosi VAT (w wysokości *23%*).

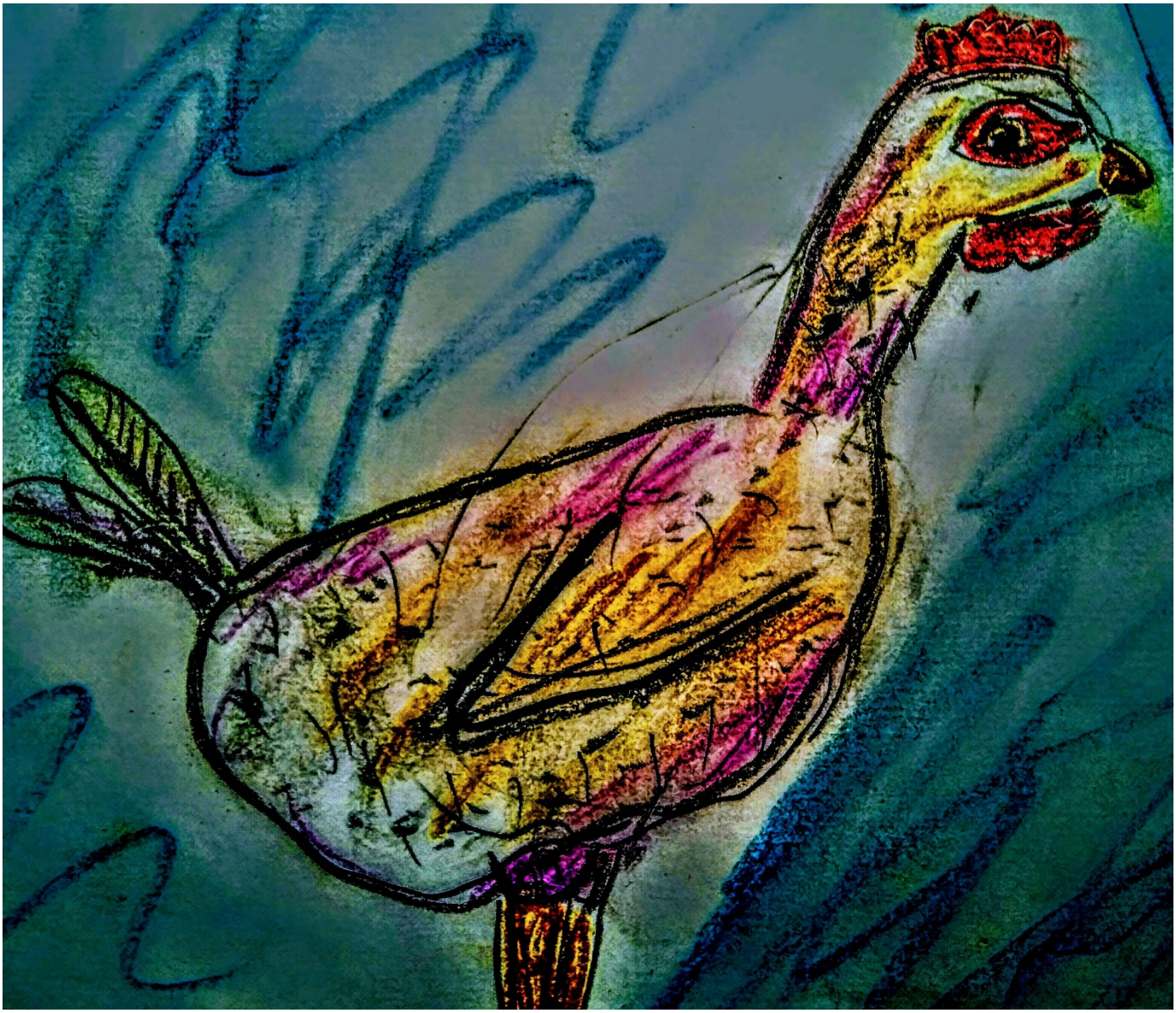
x – cena netto telewizora
1,23 x – cena brutto telewizora
1,23 x = 3.602,20 zł | *: 1,23*
x = 2.928,62 zł
a co za tym idzie VAT wynosi resztę kwoty, tj. *3.602,20* zł – *2.928,62* zł = *673,58* zł – tyle jeszcze idzie do Państwa

Jak więc widzisz: abyś mógł kupić telewizor za który sprzedawca dla siebie weźmie niecałe *3* tysiące – twój pracodawca musi przeznaczyć dla Ciebie i dla Państwa ponad *6* tysięcy, a więc ponad dwa razy więcej! Na rzecz Państwa idzie więcej pieniędzy niż dla Ciebie! Zapewne dotychczas nie zdawałeś sobie z tego sprawy!

Pozostaje nam do omówienie jeszcze **system podatku dochodowego** obowiązującego w Polsce.
Jest on dość skomplikowany i co rusz się zmienia (politycy lubią „majstrować" przy pieniądzach), dlatego poniżej omówię jedynie jego ideę.

Ogólna zaś jego idea jest taka, że Państwo, to – fiskalnie rzecz ujmując – dość dziwna instytucja. Tym którzy nie zarabiają pieniędzy – daje je, a od tych którzy je zarabiają – zabiera je, i to tym więcej (i to nie tylko kwotowo, ale i procentowo!), im więcej oni zarabiają.
Jakie stąd płyną wnioski:

1) Państwo karze Cię za to że jesteś zaradny i że zarabiasz pieniądze, że przyczyniasz się do rozwoju gospodarki, że ci „się chce".
2) jeśli jesteś cwaniakiem (czy cwaniaczkiem) – nie pracuj i nie zarabiaj pieniędzy – wtedy na pewno Państwo ci ich nie weźmie, lecz wręcz da!



RYS – Kura oskubana do cna po wyjściu z urzędu skarbowego

<u>Spostrzeżenie:</u>
Jeśli robię zakupy (tj. daję komuś zarobić), to im większe je robię, tym procentowo mniej płacę – dostaję rabat. Analogicznie, im więcej zarabiam, a tym samym więcej płacę podatków, tym mniej procentowo powinienem ich płacić (powinienem dostać „rabat"), a tymczasem jestem jeszcze bardziej nimi obciążany! Jest to dla mnie niezrozumiałe!

> Rzeczą, którą najtrudniej w świecie zrozumieć, jest podatek dochodowy. (Albert Einstein)

Podatki płaci się od wszystkich legalnych zarobków brutto (dopiero po zapłaceniu podatku mamy kwotę zarobku netto).

Na tym świecie pewne są tylko śmierć i podatki. (Benjamin Franklin)

W ciągu roku podatkowego (pokrywającego się z rokiem kalendarzowym) stosowne zaliczki podatku dochodowego płaci za ciebie co miesiąc Twój pracodawca (a gdy sam jesteś przedsiębiorcą – to sam je za siebie płacisz).
Na koniec roku (a właściwie na początku kolejnego, gdy uzyskasz od pracodawców stosowne druki PIT) – sumujesz wszystkie przychody, odliczasz od nich koszty uzyskania – i w ten sposób uzyskujesz swój dochód brutto. Od niego liczysz podatek i sprawdzasz ile już Ty (czy Twoi pracodawcy) zapłaciliście owego podatku w miesięcznych zaliczkach. Jeśli masz niedopłatę – to dopłacasz, a jeśli nadpłatę – to Państwo Ci ją zwraca.
Niby proste. Jednak możesz stosować różne ulgi i odliczenia (tak od dochodu, jak i od podatku):

1) **Kwota wolna od podatku**

Kiedyś była jedna kwota wolna od podatku – dawała jak gdyby dodatkowy próg podatkowy.

UWAGA! **Próg podatkowy** to przedział w skali podatkowej (a nie – jakby sugerowała ta nazwa – granica między tymi przedziałami). Progi te dla osób fizycznych ustalane są w Polsce co roku odgórnie i obowiązują w rozliczeniach podatku dochodowego za ten rok.

Gdyby tak było w 2020 r. – mielibyśmy:

1) do kwoty *8.000* zł – nie płaci się podatku (można powiedzieć, że jest to „zerowy" próg podatkowy)
2) od nadwyżki od kwoty *8.000* zł do *85.532* zł – płaci się *17 %* podatku (można też powiedzieć, że płacimy *17 %* od całego zarobku nie przekraczającego kwoty *85.532* zł minus *1.360* zł – to jest właśnie *17 %* z *8.000* zł kwoty wolnej od podatku); przy zarobku *85.532* zł da nam to podatek w wysokości: *13.180,44* zł
3) od nadwyżki od kwoty *85.532* zł płacimy jeszcze *32 %* podatku
4) Ponadto od kwoty ponad *1* mln zł zapłacimy DODATKOWE *4 %* podatku (jest to więc kolejny próg podatkowy!).

Jednak w Polsce wprowadzono zmiany owej kwoty wolnej od podatku i w *2020* roku uzależniono ją od dochodu:

- dla dochodów rocznych **do *8.000* zł** wynosi ona *1.360* zł,
- dla osób zarabiających **między *8.000* a *13.000* zł** wynosi ona *1.360* zł pomniejszone o kwotę: *[834* zł *88* gr · *(*dochód – *8.000* zł*)] : 5.000* zł,
- dla osób zarabiających **między *13.000* zł a *85.528* zł** kwota ta wynosi zawsze *525,12* zł,
- Ci z kolei, którzy zarobili **pomiędzy *85.528* a *127.000* zł** muszą skorzystać ze wzoru pomniejszającego kwotę *525,12* o*: [525,12 x (*dochód – *85.528* zł*)] : 41.472* zł,
- dla dochodów wyższych niż ***127.000* zł** kwota wolna od podatku wynosi *0* zł.

Jak więc widzisz – równo to skomplikowali!

CIEKAWOSTKA!

Z tej kwoty wolnej od podatku korzystają w ten sposób, że w ogóle nie płacą podatku, praktycznie tylko osoby pracujące w sezonie wakacyjnym – przez dwa lub trzy miesiące mogą one legalnie zarobić do *8* tysięcy złotych brutto, a potem – w następnym roku po rozliczeniu się z fiskusem – cała kwota odprowadzona w ramach podatku jest im zwracana. Osoby pracujące standardowo w każdym miesiącu musiałyby zarabiać niewiele ponad *600* zł, żeby móc otrzymać zwrot całego podatku (co jest kilka razy poniżej pensji minimalnej!). Jak widzisz – gdy ktoś zarabia na poziomie ledwo dającym możliwość utrzymania się – mimo takiej (eufemistycznie mówiąc) mało komfortowej dla niego sytuacji, i tak musi płacić podatki ☹

2) **Ulgi podatkowe**, jak np. ulga internetowa, czy budowlana. Niektóre tego typu ulgi odlicza się od dochodu, a niektóre od podatku. Trzeba wiec uważać…

3) Potencjalny zysk wynikający ze **wspólnego rozliczenia**

W Polsce małżonkowie nie mający rozdzielności majątkowej, mogą rozliczać się wspólnie. Pierwszy plus wynikający z takiej sytuacji, to fakt, że miast dwóch składają tylko jedną – wspólną – deklarację PIT. Drugi jednak – główny – profit, to fakt że mogą na tym zaoszczędzić pieniądze. Jest tak jednak tylko wtedy, gdy jeden z małżonków zarabia szczególnie dużo (i wskoczyłby na drugi próg podatkowy), a drugi zarabia niewiele lub nic. Wtedy, dzięki rozliczaniu wspólnemu, lepiej zarabiający małżonek nie będzie płacił według progu *32%*, lecz małżeństwo wspólnie będzie rozliczane z progu *17%*. Ponadto gdy mniej zarabiający małżonek zarabia poniżej *8.000* zł (lub nic nie

zarabia) – wówczas dodatkowo będzie można skorzystać – odpowiednio – jz brakującej części, czy wręcz z całości z owego „zerowego” progu podatkowego ☺

Inaczej można to ująć w ten sposób, że ów zysk przy wspólnym rozliczeniu wynika z faktu, że progi podatkowe, które ustalane są dla pojedynczego pracownika, w przypadku par rozliczających się wspólnie, są po prostu podwajane. W związku z tym **maksymalną kwotą roczną zarobku dla pierwszego progu w przypadku małżeństw jest już nie *85.528* zł, a *171.056* zł**, a kwota wolna – nie *8.000* zł, lecz *16.000* zł.

W Polsce przedsiębiorcy mogą się rozliczać:

1) według przedstawionego powyżej schematu progresywnego, lecz z odliczeniami,
2) liniowo – *17 %* od dochodu (wtedy nie wchodzą w progi podatkowe, ale i nie stosują żadnych ulg ani odliczeń – jak więc widzisz, mamy tu tzw. ”coś za coś”),
3) według tzw. „karty” płacą zryczałtowany (tj. odgórnie ustalony kwotowo) podatek w zależności od rodzaju wykonywanej działalności, liczby zatrudnianych osób i wielkości miejscowości w której tę działalność prowadzą).

Wybór sposobu opodatkowania zależy od przedsiębiorcy (zrozumiałe, że zanim to zrobi dokonuje stosowych obliczeń, która z tych form jest dla niego najbardziej opłacalna).

X. POWIĄZANIA I PODZIAŁY

1. Przyporządkowania jednoznaczne, czyli funkcje

Jak przypuszczam, ze szkoły zapewne źle wspominasz **funkcje**, gdyż wprowadzane są często w bardzo abstrakcyjny sposób. Wytłumaczę więc Ci czym jest ta funkcja – tak „na chłopski rozum"?
Jest ona przyporządkowaniem jednoznacznym elementom jednego zbioru (zwykle jednej kategorii) elementów z drugiego zbioru (również jednej kategorii, być może tej samej, ale zwykle innej).
Też skomplikowanie, ale już przechodzę na praktykę – poprzez podanie konkretnych przykładów funkcji:

- Każdemu drzewu w parku przyporządkowujemy jego gatunek (zawsze jest to jednoznaczne – każde drzewo jest jednego konkretnego gatunku: jest klonem, brzozą, jodłą, …); *2* zbiory o których była wyżej mowa, to odpowiednio: zbiór drzew i zbiór gatunków drzew;
- każdemu człowiekowi (oprócz Adama i Ewy i tym, którzy urodzili się w wyniku partenogenezy) – jego biologicznego ojca;
- każdemu człowiekowi jego pierwsze imię;
- każdemu człowiekowi liczbę jego rodzeństwa;
- każdemu towarowi w sklepie – cenę brutto;
- każdej książce – tytuł.

Nie są funkcjami następujące przyporządkowania:

- każdemu człowiekowi – imię (bo może mieć ich kilka);
- każdemu człowiekowi – rodzica (bo nie będzie wiadomo którego);
- każdej miejscowości – ulicę (bo zwykle ma ich więcej niż jedną).

2. Pary funkcji odwrotnych

Czy można odwrócić rzeczywistość? W matematyce – owszem!
Jeśli wyciągnąłem z konta *1.000* zł – to jak przywrócić je do poprzedniego stanu? – Należy zasilić je kwotą *1.000* zł. Jak więc widzimy, operacją odwrotną do odejmowania jest dodawanie.
Co z kolei będzie jeśli wpłacę na konto *2.000* zł – ile wtedy będę mógł maksymalnie z niego wyciągnąć, by nie zejść poniżej kwoty sprzed tej wpłaty? Oczywiście też *2.000* zł. Tak więc operacją odwrotną do dodawania jest odejmowanie.
Łącznie daje nam to, że ta odwrotność działa w dwie strony – jest wzajemna: dodawanie i odejmowanie są działaniami wzajemnie odwrotnymi.
Analogicznie jest z mnożeniem i dzieleniem. Jeśli dwukrotnie zmniejszymy stan konta, to – aby wrócił on do pierwotnego stanu – musimy podwoić znajdujące się na nim zasoby pieniężne. Analogicznie jest i w drugą stro2nę – jeśli podwoiłem pieniądze na koncie, to mogę dwukrotnie zmniejszyć te zasoby, by dojść do stanu pierwotnego. Tak więc i mnożenie i dzielenie są operacjami wzajemnie odwrotnymi.
Analogicznie funkcjami wzajemnie odwrotnymi są potęgowanie i pierwiastkowania. Wszak (przy założeniu: $a, b \geq 0$) $\sqrt{a} =$ b oznacza to samo, co $a = b^2$ (korzystaliśmy już z tego przy obliczeniach ksero).
W końcu jeśli między liczbami b (> 0) i c istnieje zależność logarytmiczna, tj. $\log_a b = c$, gdzie a jest pewną ustaloną liczbą (oczywiście – ze względu na wymogi stawiane logarytmom – musi być: (a$> 0, a \neq 0$) – to (z definicji logarytmu) mamy między nimi zależność wykładniczą: $a^c = b$. Również i ta zależność działa w drugą stronę: jeśli istnieje między dwiema liczbami zależność wykładnicza (jak wyżej), to i istnieje między nimi zależność logarytmiczna (też jak wyżej).
Ta zależność oznacza na przykład, że gdy mamy radio z potencjometrem głośności (z pokrętłem lub suwakiem) ze skalą logarytmiczną – to przesunięcie suwaka o taki sam odcinek lub przekręcenie pokrętła o taki sam kąt – to dodanie czy odjęcie takiej samej liczby decybeli, jak również czy też pomnożenie czy podzielenie poziomu głośności *n*-krotnie (np. *2*-krotne zwiększenie głośności, to jej wzrost o *3* dB; wzrost o *9* dB – to *8*-krotne podgłośnienie, bo $9 = 3 + 3 + 3$, a za każdą trójką kryje się pomożenie głośności przez *2*, czyli w sumie o $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ razy).

3. Porządki (czyli ciągi)

Może znane jest Ci z kart pojęcie „sekwens”. Mieć sekwens – znaczy mieć kilka kolejnych co do wartości kart w tym samym kolorze. Sekwens oznacz więc sekwencję – układ liniowy jakichś obiektów ustanowiony według jakiejś reguły.
W matematyce taki układ nazywa się **ciągiem**. W matematyce w ciągu nie musi być jednak żadnej reguły według której miałyby być ustawione występujące w nim elementy. Nieraz zamiast „ciąg” mówi się „szereg”.
Ciągi mogą być zbudowane/ustawione z czegokolwiek: z książek (na półce), guzików (na makiecie marynarki), krawatów (na wieszaku), ...
Ciąg może też być ustawiony z liczb – wtedy mamy do czynienia z **ciągiem liczbowym**.
Jeżeli jest tak, że w ciągu tym kolejne wyrazy różnią o stałą wartość (liczbę) – to wtedy mamy do czynienia z **ciągiem arytmetycznym**.
Przykład:
Mamy w skarbonce *30* złotych i każdego dnia wrzucamy do niej *2* złote. Zawartość skarbonki w kolejne dni tworzy mam **ciąg liczbowy rosnący**: *30, 32, 34, 36, ...*
Jeżeli z kolei z konta bankowego na którym jest *4.000* zł będziemy codziennie wyjmować 50 złotych – to otrzymamy **ciąg arytmetyczny malejący**: *4.000, 3.950, 3.900, ...*

Inny rodzaj ciągu – to **ciąg geometryczny**. W jego przypadku kolejne wyrazy otrzymujemy przez pomnożenie obecnej wartości przez pewną (ustaloną, stałą) liczbę.
Powiedzmy, że ktoś prowadzi przedsiębiorstwo o miesięcznej rentowności *50 %*. Jego kapitał początkowy stanowi *1.000* zł, a wszystkie zarobione pieniądze są reinwestowane. Jak będą kształtować się te kwoty co miesiąc: *1.000, 1.500, 2.250, ...* – dodać 50 %, znaczy uzyskać *150 %* dotychczasowej wartości, tj. dotychczasową wartość pomnożyć przez $\frac{150}{100}$, czyli przez *1,5*.

Procent składany – to ciąg geometryczny
Rozpatrzmy sytuację. Wkładamy do banku *5.000* zł na *10* % w skali roku, na *3* lata.
Zobaczmy jak się będą kształtowały wysokości zgromadzonych zasobów pieniężnych co roku.

Czas	Konto	Doliczone w tym roku odsetki
Na początku	*500*	
Po roku	*550*	*50*
Po *2* latach	*605*	*55*
Po *3* latach	*665,50*	*60,50*

· 1,1 · 0,1

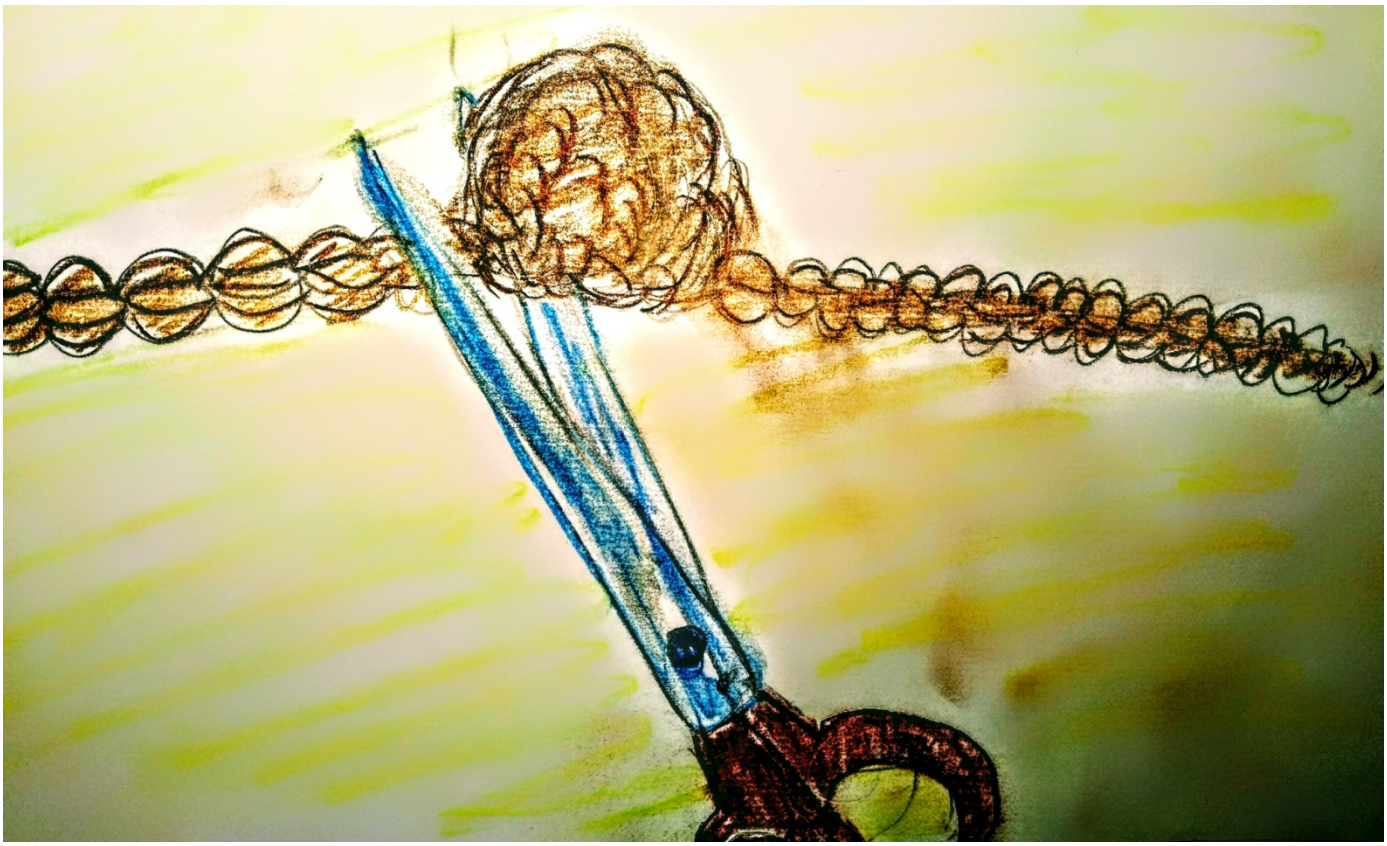
Jak widać, co roku dolicza się *10 %*.
Co roku są to coraz większe kwoty, bo owe *10 %* jest liczone od coraz większej kwoty:

- Na początku mamy *x*.
- Po roku: x + *10% x = x +0,1 x = 1,1 x*
- Po 2 latach: *1,1 x + 10% · 1,1 x = 1,1 x + 0,1 · 1,1 x = (1 + 0,1) · 1,1 x = 1,1 · 1,1 x =* $1{,}1^2 x$
- Po *3* latach: od razu widać, że to będzie: $1{,}1^3 x$
- Ogólnie – po n latach: $1{,}1^n x$ (np. po *10* latach: $1{,}1^{10} x$).

Można też podać ogólny wzór: $K_n = (1+p)^n \cdot K$, gdzie:
K_n – zgromadzony kapitał po *n* latach,
K– kapitał początkowy,
p – oprocentowanie (uwaga! *15 % = 15/100 = 0,15*),
n – liczba lat na które założyliśmy lokatę.

4. Podziały i hierarchie

Podziałem jakiegoś zbioru *A* nazywamy (formalnie powiedziawszy) zbiór jego podzbiorów: niepustych, rozłącznych, w sumie dających nam cały zbiór *A*.
Jeśli więc masz np. zbiór *{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}* – to można go podzielić chociażby na następujące *3* zbiory: *{1, 3, 5, 7, 9}, {2, 4, 6}, {8}*. Jak widzisz – każdy z nich jest niepusty, są one rozłączne (żadne *2* z nich nie mają elementu wspólnego) i zawierają wszystkie elementy wyjściowego zbioru.



Kolejnym sposobem zachodzenia zależności między zbiorami jest **hierarchia**. Tworzy ją ciąg wzajemnie zawierających się w sobie zbiorów. Tak jest np. w przypadku hierarchii kościelnej, gdzie mamy: lud wierny – jego część stanowią osoby konsekrowane (księża, bracia i siostry zakonne) – część tego zbioru stanowią księża – część tego zbioru stanowią biskupi – część tego zbioru stanowią arcybiskupi – część tego zbioru stanowią kardynałowie – część tego zbioru stanowi papież.
Podobnie jest w szkole: społeczność szkolna – nauczyciele – dyrekcja
Podobnie jest też w wojski, w policji, w zakładzie pracy.

Co prawda tych dwóch pojęć nie wprowadza się w szkole, ale postanowiłem je tu podać, ze względu na to, że bardzo często występują w życiu.

XI. POMIARY I OBLICZENIA NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI

1. Płaszczyznowe obiekty, ich pomiary i obliczenia

W tym paragrafie zajmiemy się geometrią płaszczyzny.

Płaszczyzna jest nieograniczoną z żadnej strony strukturą dwu-wymiarową. Tym co na niej znajdziesz (z matematycznego punktu widzenia) – to mogą być:

- punkt, odcinek, półprosta, prosta;
- krzywa, łamana (w tym łamana zamknięta), okrąg, …;
- wielokąt, koło, …

RYS – Trygonom-agronom odmierza pole (ziemię)

Obiekty z p. 1. sprowadzają się do jednego wymiaru (każdy z nich mieści się na jakiejś prostej).
Nie posiadają one pola, ale jedynie długość:

- punkt – *0*,
- odcinek – skończoną niezerowa,
- półprosta i prosta – nieskończoną.

Tak właściwie, to punkt można określić jako obiekt *0*-wymiarowy: nie ma on ani szerokości, ani długości, ani wysokości.

Obiektów z p. 2. nie da się umieścić na żadnej prostej – rzeczywiście wymagają one płaszczyzny jako swojej „bazy" na której są umieszczone. Mimo to nie posiadają one pola, lecz jedynie długość.

Obiekty z p. 3. mają tak obwód, jak i pole. W przypadku wielokątów – ich obwód (oznaczany *L* od z ang. *lenght* = długość) liczy się sumując długości wszystkich boków danego wielokąta. W szczególności:

- w **trapezie** (czworokącie o co najmniej jednej parze boków równoległych) $L = a + b + c + d$, gdzie *a*, *b*, *c* i *d* – to długości jego poszczególnych boków;
- w **równoległoboku** (czworokącie o 2 parach boków równoległych) i w **prostokącie** (równoległoboku o kątach prostych) $L = 2a + 2b$, gdzie *a* i *b* to długości boków (krótszego i dłuższego);
- w **rombie** (równoległoboku o równych bokach) i w **kwadracie** (jest to prostokąt o równych bokach, jak i romb o prostych kątach) $L = 4a$, gdzie *a* to długość boku;
- w **wielokątach foremnych**, tj. o równych bokach i równych kątach (są to np. trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny, …) $L = n \cdot a$, gdzie *n* oznacza liczbę boków, a *a* długość każdego z nich.

Z kolei w przypadku **koła** – jego obwód liczy się według wzoru: $L = 2\pi r$, gdzie *L* (od z ang. *lenght* = długość) oznacza obwód, π (pi) to stała równa w przybliżenie *3,14159*, a *r* to długość promienia tego koła.

Po co liczy się obwód? – Aby wiedzieć ile potrzeba płotu na ogrodzenie działki, ile potrzeba lamówki na obszycie dywanu, ile będzie potrzeba kostki granitowej na obwiedzenie rabaty, …

Drugą rzecz, którą zwykliśmy liczyć w przypadku figur geometrycznych, jest ich pole (oznaczane symbolicznie przez *P*). Liczy się je aby wiedzieć: ile potrzeba farby do pomalowania danego obiektu (np. sufitu), ile potrzeba trawy do wysiania na ogródku, ...

Aby je wyznaczyć, korzysta się z następujących wzorów:

- dla koła: $P = \pi \cdot r^2$,
- dla równoległoboku, rombu, prostokąta: $P = a \cdot h$ (gdzie *a* to długość podstawy, a *h* to wysokość),
- dla kwadratu: $P = a^2$ oraz $P = \frac{1}{2} \cdot d^2$ (gdzie *d* to długość przekątnej),
- dla trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ (gdzie *a* i *b* to długości podstaw, a *h* to wysokość),
- dla deltoidu oraz (dodatkowe wzory względem już wyżej podanych) dla rombu i trapezu $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$, gdzie d_1 i d_2 to długości ich przekątnych,
- dla trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ (gdzie a to długość jednego z jego boków, a h - wysokość), a dla trójkąta równobocznego dodatkowo $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Przestrzenne obiekty, ich pomiary i obliczenia

Tak jak geometria płaska dotyczyła głównie figur, tak geometria przestrzenna dotyczy głównie brył.
W ich przypadku liczymy głównie *2* wartości:

- pole powierzchni, przy czym może to być pole powierzchni całkowitej (P lub P_c), podstawy (P_p), czy pole powierzchni bocznej (P_b)
- i objętość

Pole liczymy – znowu choćby po to, aby wiedzieć ile potrzeba farby na pomalowanie, …
Z kolei objętość – aby móc obliczyć ciężar właściwy, ile do pojemnika o określonym kształcie wejdzie płynu, na jak długo starczy powietrza w zamkniętym pomieszczeniu, …

Najpierw kilka definicji podstawowych brył geometrycznych:

GRANIASTOSŁUPY

Graniastosłup (bryła, która ma *2* podstawy będące identycznymi wielokątami, a ściany boczne są prostokątami – wtedy jest to graniastosłup prosty, lub prostokątami i równoległobokami – wtedy jest to graniastosłup pochyły).

Prostopadłościan – graniastosłup o podstawie prostokątnej.

Graniastosłup foremny – graniastosłup prosty o podstawie będącej wielokątem foremnym

OSTROSŁUPY

Ostrosłup – bryła o podstawie będącej wielokątem i o pozostałych ścianach będących trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup o podstawie będącej wielokątem foremnym

Ostrosłup prosty – ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równej długości (jego podstawą musi być wielokąt foremny, a jego wysokość musi padać na środek podstawy)

BRYŁY OBROTOWE

Walec – bryła powstała w wyniki obrotu prostokąta wokół jednej jego krawędzi

Stożek – bryła powstała w wyniku obroty trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych

Kula – bryła powstała w wyniku obrotu koła wokół jego średnicy

Powierzchnia kuli – to sfera; można ją zdefiniować, jako powierzchnią powstałą w wyniku obrotu okręgu wokół jego średnicy.

Wzory:

Bryła	Pole	Objętość
Graniastosłup	$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$ przy czym P_b liczymy sumując pola składających się na nie pól ścian bocznych (prostokątów jeśli jest to graniastosłup prosty, a równoległoboków w przypadku graniastosłupa pochyłego)	$V = P_p \cdot h$
Prostopadłościan	$P_c = 2 \cdot (ab + ac + bc)$	$V = abc$
Ostrosłup	$P_c = P_p + P_b$ przy czym P_b liczymy sumując pola składających się na nie pól ścian bocznych (trójkątów)	$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$
Walec	$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi h = 2\pi(r + h)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Stożek	$P_c = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$
Kula	$P = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$
Sfera	$P = 4\pi r^2$	-

<u>Legenda</u>:

P - pole

P_c - pole całkowite

P_p - pole podstawy

P_b - pole boczne

a, b, c - krawędzie prostopadłościanu

h - wysokość (bryły)

l - tworząca (odcinek łączący dowolny zewnętrzny punkt podstawy ostrosłupa z jego wierzchołkiem)

π - stała pi (równa w przybliżeniu *3,14159*)

<u>Zadanie</u>

Ile potrzeba kupić puszek farby aby pomalować pokój o wymiarach 3 na 4 metry, o wysokości *2,65* m , jeśli:

- ściany chcemy pomalować farbą szarą, a sufit jasną,
- konieczne jest podwójne malowanie,
- jedna puszka starcza na pomalowanie *10* m^2 powierzchni.

Najpierw zajmijmy się sufitem. Ma on $3 \cdot 4 = 12\,m^2$ powierzchni. Potrzebujemy więc farbę na $2 \cdot 12\,m^2 = 24\,m^2$ powierzchni. Ponieważ *24/10 = 2,4* – potrzebujemy więc kupić *3* puszki farby białej (*2* nam nie starczą!).

Teraz zajmijmy się ścianami. Dla ułatwienia możemy przyjąć, że ściany tworzą mur o długości $2 \cdot 3\,m + 2 \cdot 4\,m = 14\,m$ i o wysokości $2{,}65\,m$. Tym samym mamy do pomalowania $14\,m \cdot 2{,}65\,m = 37{,}1\,m^2$ ściany, a więc farby potrzebujemy na $2 \cdot 37{,}1\,m^2 = 74{,}2\,m^2$. A ponieważ *74,2/10 = 7,42* – zatem potrzebujemy kupić 8 puszek farby szarej).

3. „Padał deszcz", czyli o przechodzeniu między wymiarami ;)

Gdy słyszysz, że na *1* m^2 napadało *16* litrów wody, to jak wysoki jest słup wody (o ile w ogóle nie wsiąkła w ziemię ani nie spłynęła)?

Policzmy, a w tym celu najpierw pomyślmy! *1* m^3, to *10* dm · *10* dm ·*10* dm = *1.000* dm^3, czyli *1.000 l.*
Mamy więc, że w sześcianie o podstawie *1* m^2 i wysokości *1* m wchodzi *1.000* l. Ten *1* m wysokości, to inaczej *100* cm, czyli *100* · *10* mm = *1.000* mm. Każdemu mm odpowiada więc *1* l. Tak więc *1* l „rozlany" na powierzchni dokładnie *1* m^2 da nam wysokość *1* mm. *16* litrów da więc nam wysokość *16* mm, czyli *1,6* cm. I po zadaniu ☺

Policzyliśmy tu *1* litr (*1* dm^3) na jaką wysokość się przekłada przy podstawie graniastosłupa *1* m^2 (czyli jak w temacie paragrafu ☺).

XII. PRZEKSZTAŁCANIE I PORÓWNYWANIE WIELKOŚCI METRYCZNYCH

1. Przeliczania wielkości między różnymi systemami metrycznymi

Zacznijmy od wyjaśnienia co to są systemy metryczne. Otóż są to systemy wyrażania jednostek metrycznych, czyli takich, które można zmierzyć. Przykład: odległość możesz mierzyć w metrach, ale też jardach; w centymetrach, czy też w calach. Jak wtedy przeliczać daną długość (odległość) wyrażona w jednej z tych jednostek na wyrażoną w innej z nich? I skąd w ogóle wzięły się owe różne systemy miar?
Zacznijmy od udzielenia odpowiedzi na drugie z tych pytań. Otóż w różnych krajach czy regionach (szerszych czy węższych niż kraj) stosowano różne jednostki, np.:

- w krajach anglosaskich: mile, cale, funty, Fahrenheity, galony, stopy kwadratowe;
- obecnie choćby w Polsce – odpowiednio: kilometry, centymetry, kilogramy, stopnie Celsjusza, litry, metry kwadratowe.

Nieraz okazuje się, że chcemy (czy musimy) wiedzieć ile dana wartość wyrażona w jednej jednostce wynosi w drugiej, np. gdy:

- w jednym kraju używamy obu systemów w różnych sytuacjach – np. długość stołu mierzymy w centymetrach, a przekątną ekranu telewizora czy telefonu podają nam w calach – i jesteśmy wtedy zainteresowani by wiedzieć ile to jest w centymetrach, bo jednostki miary lepiej „czujemy",
- dowiadujemy się, że w kraju do którego lecimy jest określona temperatura powietrza w Fahrenheitach, a nam to nic nie mówi i dlatego chcemy wiedzieć ile to jest w stopniach Celsjusza.

Jak jednak przeliczać jedne na drugie (i w drugą stronę?). Odpowiedź jest prosta – według odpowiedniego przelicznika.
Owych przeliczeń zwykle dokonujemy analogicznie, jak to było w przypadku walut.
Na przykład skoro *1* in (cal) = *2,54* cm, zatem:

- *6* in = *6* · *2,54* cm = *15,24* cm
- *20* cm = *(20 / 2,54)* in = *7,87* in

Można też przeliczać akry na ary lub hektary:

- 1 akr = 0,40468564224 hektara
- 1 akr = 40,468564224 arów

Tylko w przypadku temperatury jest inna metoda przeliczania niż $x = a \cdot y$, gdzie x, y – jednostki, a – przelicznik.
Wiąże się to z faktem innego ustawienia zera w stali Celsjusza i Fahrenheita; $0\ K = -273{,}15\ ^oC$.
(UWAGA! W skali Fahrenheita – nie mamy stopni Fahrenheita, lecz są po prostu Fahrenheity).

Jak przeliczać stopnie Celsjusza na Fahrenheity i Kelwiny?

- Przeliczanie stopni Celsjusza na stopnie Fahrenheita: $F = 32 + 1{,}8 \cdot C$
- Przeliczanie stopni Celsjusza na Kelwiny: $K = C + 273{,}15$
- Przeliczanie stopni Fahrenheita na stopnie Celsjusza: $C = (F - 32) / 1{,}8$
- Przeliczanie stopni Fahrenheita na Kelwiny: $K = (F + 459{,}67) / 1{,}8$
- Przeliczanie Kelwinów na stopnie Celsjusza: $C = K - 273{,}15$
- Przeliczanie Kelwinów na stopnie Fahrenheita: $F = (1{,}8 \cdot K) - 459{,}67$

Jak widać – każda z tych skal w innym miejscu ma ustawione zero – dlatego zależności te nie są proporcjami, lecz :

4) w przypadku C i K – przesunięciami (obie te skale mają tę samą szerokość 1 stopnia),
5) w przypadku zestawienia (C lub K) z F – ponieważ szerokość *1* ^{o}C – to *1,8* K (jak i *1,8* ^{o}F) – kombinacją przesunięcia i proporcji.

UWAGA!
1 rok świetny – to nie jednostka czasu, lecz odległości. Jest to mianowicie odległość, jaką światło przebywa w ciągu *1* roku (ziemskiego), tj. czasu w jakim Ziemia obiega Słońce.

2. Przedrostki w jednostkach metrycznych

Do mierzenia czy wyrażania określonych kategorii metrycznych (jak np. długość, objętość, ciśnienie, masa, napięcie, natężeni, opór, …) służą nam tzw. podstawowe jednostki miary odpowiednio: metr, litr, gram, Pascal, volt, amper, om, …), często z użyciem ich pewnych krotności czy podkrotności (części), które to mają one swoje nazwy oraz skróty. O tym jak wyglądają – podam na poniższych przykładach.

KROTNOŚCI	PODKROTNOŚCI (CZĘŚCI)
1 gram (g) – jednostka podstawowa	*1* metr (m) – jednostka podstawowa
10 g = 10^1 g = *1* dekagram	*0,1* m = 10^{-1} m = *1* decymetr = *1* dm
100 g = 10^2 g = *1* hektogram = 1 hg (*10* „deko”)	*0,01* m = 10^{-2} m = *1* centymetr = *1* cm
1.000 g = 10^3 g = *1* kilogram = *1* kg („kilo”)	*0,001* m = 10^{-3} m = *1* milimetr = *1* mm
1.000.000 g = 10^6 g = *1* megagram = *1* Mg (tona)	*0,000.001* m = 10^{-6} m = *1* mikrometr = *1* μm
1.000.000.000 g = 10^9 g = *1* gigagram = *1* Gg	*0,000.000.001* m = 10^{-9} m = *1* nanometr = *1* nm
1.000.000.000.000 g = 10^{12} g = *1* teragram = *1* Tg	*0,000.000.000.001* m = 10^{-12} m = *1* pikometr = *1* pm

UWAGA!
Niektóre przedrostki zwykło się używać tylko z niektórymi jednostkami metrycznymi. Jest tak np. z „hekto”, które używa się z jedynie z Pascalami i litrami (z innymi jednostkami „jakoś nie brzmią”, jak np. w powyższej tabeli „hetogram”).
Niektóre jednostki połączone z ich przedrostkami zwykło się nazywać żargonowo, przy czym:

b) może to być związane z tym przedrostkiem – np. na dekagram mówi się „deko”, a na kilogram – „kilo”,
c) jak i nie, przy czym w tej sytuacji mamy dwa przypadki – nazwy te mogą być:
   - formalne – np. na *1.000* kg mówi się **tona**, na *1* dm^3 – litr,
   - nieformalne – np. na *1* m^3 mówi się **kubik** (wody, czy drewna na opał)

Może być też tak, że przedrostek połączony z jednostką sam się zmienia: *100* hektarów – to nie hektoar, lecz hektar.
Może też dochodzić do pewnych „wypaczeń” (tj. wypowiedzi co prawda niezgodnych z prawdą, nieścisłych, nieformalanych, ale w pełni dla wszystkich zrozumiałych) – np. mówimy, że mieszkanie ma 70 metrów zamiast powiedzieć że ma *70* m^2.

3. Przeliczanie wartości o różnych przedrostkach z tego samego systemu metrycznego

Jak wiesz, *1* litr – to $1\ dm^3 = 1 \cdot (10\ cm)^3 = 1.000\ cm^3 = 1.000\ ml$
Ponieważ dm to $10\ cm$ - zatem dm^3 (czyli litr) – to $1.000\ cm^3$ (a jako że tysięczna część to „mili” – mamy że na litr wchodzi $1.000\ ml$). Dla nas najbardziej istotne jest tu to, że zmiana jednej jednostki na *10* mniejszych, spowodowała w 3 potędze zwielokrotnienie się jej też $10^3 = 1.000$ –krotne.
Zobaczmy kolejne zadania:

1) $1\ m^2$ ile ma dm^2, a ile cm^2? $1\ m^2 = (10\ dm)^2 = 100\ dm^2$
   $1\ m^2 = (100\ cm)^2 = 10.000\ cm^2$
2) $1\ m^3$ („kubik”) - ile to dm^2 (litrów)? $1\ m^3 = (10\ dm)^3 = 1.000\ dm^3 = 1.000\ l$

Zobaczmy jeszcze jak jest z powierzchnią ziemi.

Powierzchnia ziemi – to areał. Nazwa ta pochodzi od jednostki powierzchni „ar” równej $100\ m^2$ (może to więc być powierzchnia ziemi w kształcie kwadratu $10\ m \times 10\ m$).

Kwadrat o boku 10 razy większym, a więc równym $100\ m$ (tyle co od słupka do słupka na drodze) – to:

$100\ m \times 100\ m = (100\ m)^2 = 10.000\ m^2 = 100 \cdot 100\ m^2 = 100\ ar = 1\ ha$ (1 hektar)

$1\ km^2 = (1000\ m)^2 = 1.000.000\ m^2 = 10.000\ ar = 100\ ha$

4. Podobieństwo (skala, różne rodzaje skal na mapie i planie)

Mapa czy plan są schematycznym przedstawieniem w pewnej skali sytuacji jaka ma miejsce w rzeczywistości.
Przy tym obrazowaniu, skala zwykle oznacza pewne (kilkadziesiąt czy kilkaset; kilka, kilkadziesiąt czy kilkaset tysięcy, a nawet miliony razy!) pomniejszenie.

Skala określa stosunek długości na planie czy mapie w stosunku do stosownej długości (odległości) w terenie.
Skalę (inaczej: skalę kartograficzną) przedstawia się na *3* sposoby:
1) **podziałką graficzną**:

– tu każdy centymetr na mapie, to *2* km w terenie

0 *2* km *4* km *6* km

2) **konkretnym zapisem**: *1* cm = *5* km – tu każdy centymetr na mapie, to *5* km w terenie.
3) **proporcją**: *1 : 3.000.000* – ten zapis oznacza, że na mapie wszystko jest *3.000.000* razy mniejsze niż w rzeczywistości, czyli że każdemu cm na mapie odpowiada w terenie: *3.000.000* cm = (skreślamy *2* zera) *30.000* m = (skreślamy *3* zera) *30* km; tak więc (to warto zapamiętać): skreślając w sumie *5* zer po prawej stronie otrzymujemy <u>*1* cm na mapie ile km odpowiada w terenie</u>. W tym przypadku, jeśli odległość na mapie wyniesie *5* cm, to w terenie będzie to 5 · 30 km = *150* km.

Plan a mapa

Plan – to schematyczne przedstawienie obszaru o powierzchni co najwyżej aglomeracji.
Według innej definicji (bezpośrednio odnoszącej się do skali):
Plan – obraz niewielkiego obszaru powierzchni Ziemi przedstawiony na płaszczyźnie za pomocą symboli kartograficznych w dużej skali (najczęściej *1:2.000* lub *1:10.000*), a co za tym idzie bardzo szczegółowy.
W przypadku odwzorowań większych terenów ziemi, czy też (odnosząc się do *2*. definicji) stosowania mniejszej skali, przyjmujemy że mamy do czynienia z **mapą**.
W jeszcze innym ujęcie: <u>różnica między planem a mapą</u> polega na tym, że plan przedstawia tak mały fragment powierzchni, iż można uznać ją za powierzchnię płaską.
W związku z tym – w przypadku planu:

- podczas jego przygotowywania nie trzeba uwzględniać deformacji obrazu wynikających z kulistości Ziemi,
- brak jest na nim układu współrzędnych geograficznych (w miejsce których zwykle występuje specjalną siatkę kwadratów, opisana podobnie jak pola szachowe: kolumny są oznaczone literami, a wiersze cyframi, co ułatwia lokalizację ulic, których nazwy są wymienione zazwyczaj na odwrocie planu).

Oczywiście może być też **plan mieszkania, czy pokoju** – wtedy oczywiście nie odnosi się on do powierzchni ziemi, lecz do powierzchni podłogi. Zwykle wykonuje je się w skali 1:100 (*1* cm na mapie = *1* m w terenie).

W przypadku odwzorowań pomieszczeń, czy mniejszych obiektów (np. silników) – zamiast mówić o planie, często (jak najbardziej poprawnie) mówimy wtedy o **schemacie** (te będą zwykle w skali 1 do kilku, kilkunastu czy kilkudziesięciu).

<u>UWAGA!</u>

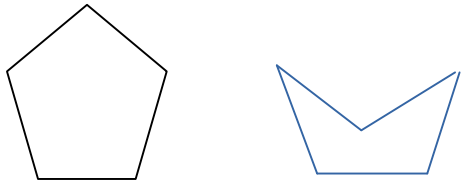
- Może być też skala *1 : 1* – wtedy plan jest w wielkości przedstawianego obiekty (np. gdy robimy obrys stopy dziecka na tekturce, by potem wyciąg gi i mieć za wzór do przymiarek w sklepie obuwniczym).
- Może też być skala *3 : 1* – wtedy de facto będziemy mieli powiększenie (tu: trzykrotne). Tak będzie np. w przypadku znaczka (gdy będziemy chcieli zobaczyć jego szczegóły).

Na koniec dopowiedzmy, że występujące tu stosunki (typu: *1 :500.000, 1 : 100, 1: 1, 3 : 1*) – to skale podobieństwa. Ukazują jak się ma zależność między odległościami na mapie (planie, czy schemacie) a w terenie.

5. Powierzchnie i przestrzenie (zasada + zmiana wielkości na ksero, formaty papieru, którą pizzę warto zamówić?)

Figury czy bryły nazywany **podobnymi**, gdy są takie same co do kształtu, lecz mogą się różnić wielkością.
Z kolei figury czy bryły nazywamy **przystającymi**, gdy są zarazem takie same co do kształtu, jak i co do wielkości.

Zakładamy przy tym, że figury odwrócone na drugą stronę (np. ╒ i ╕) mają ten sam kształt – a więc są przystające.
Każde *2* koła są podobne, każde *2* kwadraty są podobne, ale prostokąty – już niekoniecznie.
Jeśli bowiem mamy *2* prostokąty:
1) jeden o bokach *2* i *5*, a drugi o bokach *4* i *10* – to ten drugi jest *2* razy większy od pierwszego, zachowana jest proporcja między bokami: *2 : 5 = 4 : 10* jak i kąty są takie same – są zachowane (w prostokątach zawsze tak jest, bo zawsze każdy kąt ma *90* stopni).
2) jeden o bokach *2* i *5*, a drugi o bokach *4* i *13* – wówczas ten drugi jest *2* razy szerszy od pierwszego, jednak nie są one podobne, bo – porównując boki – *4* jest *2* razy większe od *2*, ale *13* już nie jest *2* razy większe od *5*, tylko *2,6* razy.
Ważne są też kąty:



– w tych pięciokątach wszystkie boki mają tę samą długość, a mimo to figury te nie są podobne – właśnie ze względy na kąty – że w II nie są takie same jak w I.

I teraz bardzo ważne **twierdzenie 1**:
<u>Jeżeli coś rośnie liniowo *n* razy (w każdym z kierunków), to jego pole rośnie n^2 razy, a objętość n^3 razy.</u>

Jeżeli w tym twierdzeniu słowo „rośnie" zastąpimy słowem „maleje", to otrzymamy następujące, równoważne mu (bo zmalenie *n*-krotne, to inaczej wzrost o $\frac{1}{n}$ -tą razy) **twierdzenie 2**:
<u>Jeżeli coś maleje liniowo *n* razy, to jego pole maleje n^2 razy, a objętość n^3 razy.</u>

Twierdzenia te można też realizować w drugą stronę. Konkretnie,

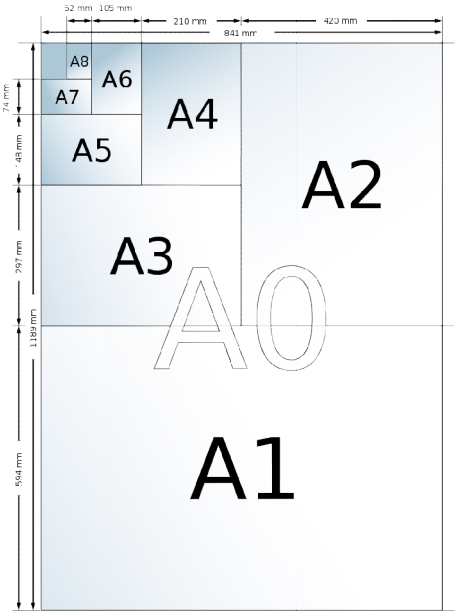
- z twierdzenia *1* otrzymujemy, że:
  1) jeśli powierzchnia pewnej figury (czy bryły) urosła k razy, to liniowo figura/bryła ta wzrosła $\sqrt{k}$ razy (bo $\left(\sqrt{k}\right)^2 = k$),
  2) jeśli objętość pewnej bryły urosła *k* razy, to liniowo ta bryła wzrosła $\sqrt[3]{k}$ razy (bo $\left(\sqrt[3]{k}\right)^3 = k$),
  3) (trudniejsze) jeśli objętość pewnej bryły urosła k razy, to pole tej bryły wzrosło $\left(\sqrt[3]{k}\right)^2$ razy (najpierw obliczyliśmy tu ile razy wzrosła ta bryła liniowo: $\sqrt[3]{k}$, a następnie wynik ten podniosłem do kwadratu, by zobaczyć ile razy wzrosło jej pole);
- z kolei z twierdzenia *2* otrzymujemy analogicznie, że:
  1) jeśli powierzchnia pewnej figury (czy bryły) zmalała *k* razy, to liniowo figura/bryła ta zmalała $\sqrt{k}$ razy (bo $\left(\sqrt{k}\right)^2 = k$),
  2) jeśli objętość pewnej bryły zmalała k razy, to liniowo ta bryła zmalała $\sqrt[3]{k}$ razy (bo $\left(\sqrt[3]{k}\right)^3 = k$),
  3) (trudniejsze) jeśli objętość pewnej bryły zmalała k razy, to pole tej bryły zmalało $\left(\sqrt[3]{k}\right)^2 =$ razy (najpierw obliczyliśmy tu ile razy zmalała ta bryła liniowo: $\sqrt[3]{k}$, a następnie wynik ten podniosłem do kwadratu, by zobaczyć ile razy zmalało jej pole).

Teraz **przejdźmy do praktyki**. Rozważymy tu *2* sytuacje:
1) kserowanie,
2) kupowanie pizzy.

<u>Ad 1)</u>
1) Na ksero chcę dwukrotnie zmniejszyć rozmiar obrazka (jego pole). Jak powinienem ustawić skalę wydruku na wyświetlaczu?
Nowe pole będzie *2* razy mniejsze niż dotychczasowe – będzie więc stanowić jego *½*.
$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}7071$ – więc ustawiamy *71 %*
2) jw., ale chcemy dwukrotnie zwiększyć pole: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ – więc ustawiamy *141 %*

W związku z powyższym, zobacz poniżej, jak wyglądają formaty papieru w tzw. formacie zasadniczym A (jest jeszcze B i C, ale te tu pomijamy). Tabela i rysunek – za https://pl.wikipedia.org/wiki/Format_arkusza :

format zasadniczy – szereg A	
Symbol formatu	Wymiary arkusza [mm]
A0	*841×1189*
A1	*594×841*
A2	*420×594*
A3	*297×420*
A4	*210×297*
A5	*148×210*
A6	*105×148*
A7	*74×105*
A8	*52×74*
A9	*37×52*
A10	*26×37*



Jest on tak skonstruowany, że arkusz A0 ma dokładnie *1* m^2 (*0,841* m · *1,189* m = *1* m^2), a proporcja boków wynosi *1.189* mm / *841* mm = *1,4138* ≈ $\sqrt{2}$.

Jak widzisz – na arkusz A0 wchodzą *2* arkusze A1, na każdy A1 – *2* arkusza A2, itd.

Mamy tu więc po kolei malenie:

- co do pola – *2* krotne – a więc o *50 %*

- liniowo – jak to już liczyliśmy powyżej – o *1,414* $=\sqrt{2}$, tj. przez tyle należy podzielić każdy bok; jest to równoważne pomnożeniu go przez *0,7071*, czyli zmaleniu każdego z boków o *29,29 %*.

Zauważ przy okazji, że zeszyt szkolny formatu A5, co ma *32* karty, jest faktycznie zrobiony z arkusza papieru A0, tj. o powierzchni *1* m^2. Przy tym:
1) jako że każda kartka jest dwustronna – zeszyt ten ma w sumie *2* m^2 powierzchni,
2) jeżeli jest on zrobiony z papieru o gramaturze *80* g (jest to waga *1* m^2 papieru) – to znaczy że waży on *80* g (bo akurat z arkusza A0 o powierzchni *1* m^2 jest on zrobiony), oczywiście nie licząc wagi farby (na nadrukowanie w nim linii czy kratek) i wagi okładki (a jako że ta jest zwykle robiona z grubszego /= *cięższego*/ papieru, więc możemy przypuszczać, że zeszyt taki waży ok. *100* g.

<u>Ad 2)</u>
Chcemy w pizzerii kupić sobie pizzę.
Ceny pizzy „Americana" w zależności od średnicy kształtują się w niej następująco:
- mała *20* cm – 14 zł,
- średnia *32* cm – *27* zł,
- duża 40 cm – *35* zł,
- max 45 cm – *41* zł.

Zakładamy, że pizze te mają tę samą grubość (tj. że jej masa rośnie jak jej pole, tj. wraz z kwadratem wzrostu jej średnicy – gdyż tak w rzeczywistości jest).

1) Zważywszy, że mała pizza (o średnicy *20* cm) kosztuje *14* zł – ile powinna kosztować średnia (o średnicy *32* cm)?
   $(32/20)^2 \cdot 14$ zł $= 35,85$ zł, a kosztuje jedynie *27* zł, a więc bardziej opłaca się ją kupić niż małą ☺
2) Zważywszy, że średnia pizza (o średnicy *32* cm) kosztuje *27* zł – ile powinna kosztować duża (o średnicy *40* cm)?
   $(40/32)^2 \cdot 27$ zł $= 42,19$ zł, a kosztuje jedynie *35* zł, a więc bardziej opłaca się ją kupić niż średnią ☺

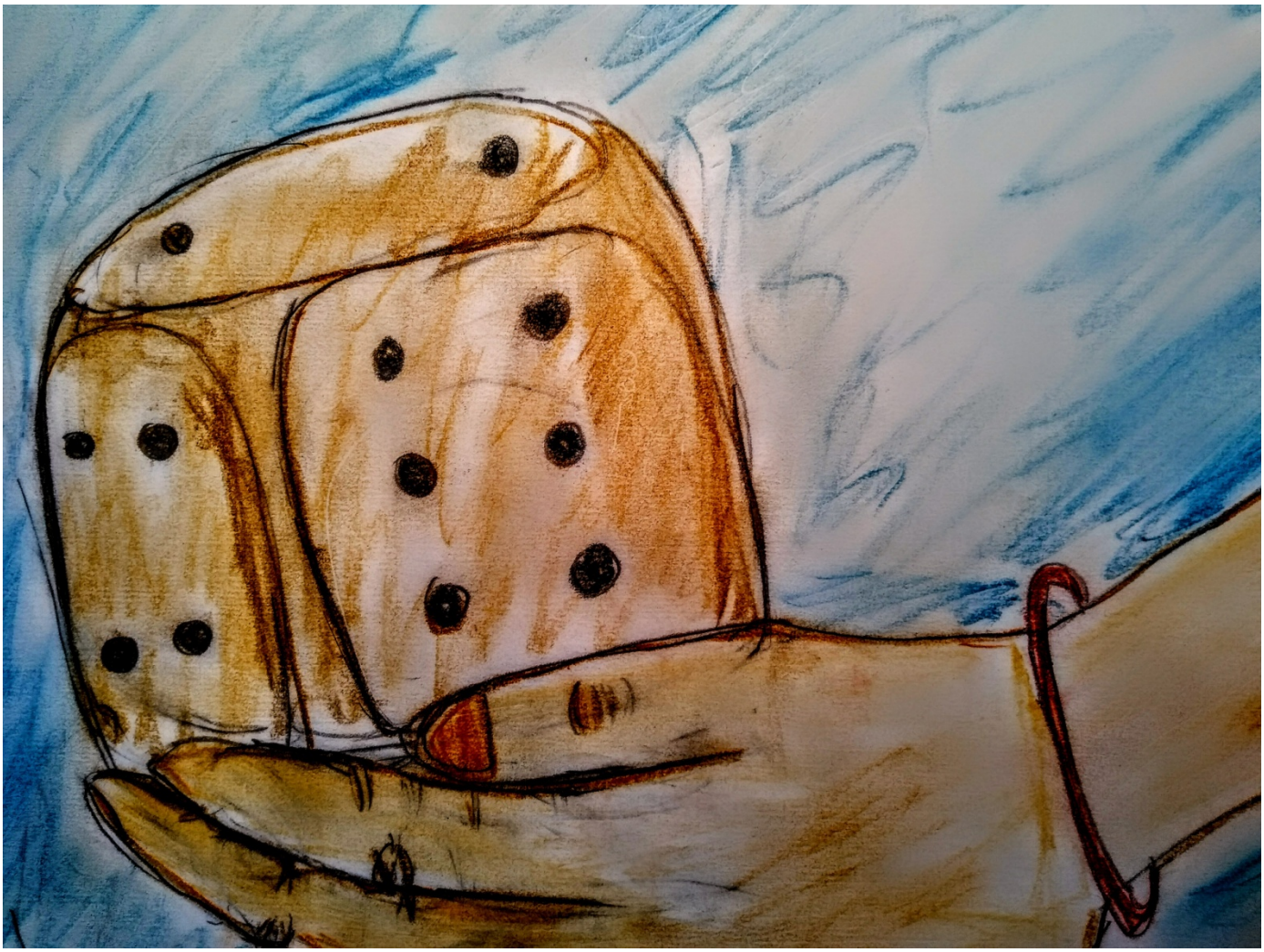
Sumując: najbardziej opłaca się kupić dużą pizzę, mniej średnią, a najmniej małą.
Gdy będziesz w jakiejkolwiek pizzerii – sprawdź jak to tam wygląda. Zwykle z identycznym wnioskiem jak u mnie!

3) Zobaczmy na koniec ile razy bardziej opłaca się kupić dużą pizzę niż małą:
   $(40/20)^2 \cdot 14$ zł $= 56$ zł – tyle powinna kosztować duża pizze, a kosztuje *35* zł,
   a więc bardziej opłaca się ją kupić niż małą: $56/35 = 1,6$ razy!

XIII. PRZYPADKI I PRZYPADKOWOŚĆ

1. Przydatna jako podstawa dalszych działań kombinatoryka, czyli zliczanie z jakimi i z iloma przypadkami możemy mieć do czynienia

Może się zdarzyć, że będziemy potrzebować wiedzieć na ile sposobów można coś zrobić (ile jest takich przypadków). Tego typu obliczeniami zajmuje się dział matematyki zwany **kombinatoryką**. Wyniki tych obliczeń w dalszej kolejności wykorzystujemy do obliczenia prawdopodobieństwa, o czym dokładniej pomówimy w kolejnym paragrafie.



Reguła mnożenia

Jeżeli rzucasz monetą – masz *2* możliwości wyniku tego co wypadnie (na górze): orzeł (O) i reszka (R). Z kolei jeśli rzucasz nią *3* razy – to wyników tych jest już *8*, bo: za pierwszym razem masz *2* możliwe wyniki (O, R), w każdym z tych *2* przypadków za drugim razem możesz otrzymać *1* z *2* wyników – to już razem *4* różne sytuacje (OO, OR, RO, RR), w końcu w trzecim rzucie w każdej z tych *4* sytuacji znowu masz *2* sytuacje: O i R, co w sumie (a właściwie „w iloczynie") daje nam $4 \cdot 2 = 8$ sytuacji (OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR). Można to też od razu obliczyć jako $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lub (od razu, ale i „uniwersalnie") jako $2^3 = 8$.

A jak będzie jak będziemy najpierw rzucać kostką do gry, a potem monetą? – wówczas możliwości będzie $6 \cdot 2 = 12$.
Analogicznie będzie gdy operacje te będziemy wykonywać w odwrotnej kolejności (najpierw rzut monetą, a potem kością do gry): $2 \cdot 6 = 12$ (ten sam wynik otrzymaliśmy w oparciu o prawo przemienności mnożenia: $a \cdot b = b \cdot a$).

Jak więc widzimy, za każdym razem mamy tu do czynienia z mnożeniem liczby kolejnym elementarnych sytuacji. Tego typu działanie nazywamy właśnie **regułą mnożenia**.

Przykład 1

Ze wsi A do wsi B prowadzi *5* ścieżek przez las. Na ile sposobów można odbyć spacer A−B−A tak, aby spacer ze wsi B do wsi A odbyć inną ścieżką niż ze wsi A do wsi B? - w pierwszą stronę na *5* sposobów, a w drugą na *4*, więc jako wynik otrzymujemy *5 · 4 = 20*.

Silnia

Na ile sposobów może dobiec do mety *5* biegaczy?

- Jako pierwszy dobiegnie *1* z *5* (*5* sposobów),
- w każdej z tych sytuacji jako drugi dobiegnie *1* z pozostałych *4* (razem mamy więc $5 \cdot 4$ sposobów),
- w każdej z tych sytuacji jako trzeci dobiegnie *1* z pozostałych *3* (razem mamy więc $5 \cdot 4 \cdot 3$ sposobów),
- w każdej z tych sytuacji jako czwarty dobiegnie *1* z pozostałych *2* (razem mamy więc $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ sposobów),
- w końcu w każdej z tych sytuacji jako piąty dobiegnie *1* pozostały zawodnik (razem mamy więc $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów).

Taki iloczyn *n* kolejnych liczb naturalnych nazywamy silnią i oznaczamy wykrzyknikiem: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Dzięki silni możemy w prosty i krótki sposób zapisywać długie iloczyny kolejnych początkowych liczb naturalnych (wszak tak właśnie definiuje się silnię), które często występują w obliczeniach kombinatorycznych, a co za tym idzie (poprzez powtarzanie się czynników w silniach dwóch różnych liczb) - możliwość łatwego skracania tego typu wyrażeń w ułamku.

Przykład 2: $\frac{8!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$

Permutacja zbioru *n*-elementowego – to dowolny *n*-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Liczbę permutacji zbioru *n*-elementowego możemy obliczyć ze wzoru: $P_n = n!$

Przytoczony powyżej przykład z liczbą możliwych sytuacji kolejności dobiegnięcia do mety liczy się właśnie za pomocą silni (*5!*), bo *de facto* mamy tam ciąg osób: która dobiegła jako *1*, która jako druga, …

Przykład 3 Ile liczby możemy utworzyć z cyfr *1, 3, 5, 6, 7* i *8* (każdą z nich wykorzystując dokładnie *1* raz)? Odpowiedź: *6!*

Przykład 4 Na ile sposobów można ustawić na półce *5* książek i *3* zeszyty tak, by ani książki ani zeszyty nie były rozdzielone?

Będziemy stosować regułę mnożenia:

- od lewej najpierw mogą być książki, a potem zeszyty, lub może być odwrotnie – *2* sytuacje,
- książki możemy ustawić na *5!* sposobów,
- zeszyty możemy ustawić na *3!* sposób.

Ostatecznie mamy więc wynik: *2 · 5! · 3! = 2 · 120 · 6 = 1.440*

Permutacja z powtórzeniami

Ile różnych słów (dowolnie czy posiadających sens, czy też – traktowanych jako ciąg kolejnych liter) możemy ułożyć z liter słowa:

- matura? Gdyby „a” były rozróżnialne – odpowiedź by brzmiała *6!*. Ponieważ jednak nie są ($ma_1tura_2 = ma_2tura_1$) – mamy ich *2* razy mniej, tj. $\frac{6!}{2}$, a formalnie $\frac{6!}{2!}$ (*2!* - bo jak już wiemy na których pozycjach stają „a” – patrzymy wtedy na ile sposobów można je na tych pozycjach ustawić w ciąg);
- matma? – $\frac{5!}{2! \cdot 2!}$
- patataj? – $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$

Kombinacja bez powtórzeń pozwala policzyć na ile sposobów można wybrać *k* elementów z *n*-elementowego zbioru.

Liczymy ją w następujący sposób: $\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$.

Możemy ją też krótko zapisać za pomocą Symbolu Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Przykład 5 Na ile sposobów można wybrać *3* zawodników w drużynie *11* osobowej?

Rozwiązanie: $C_{11}^{3}=\binom{11}{3}=\frac{11!}{3!\cdot(11-3)!}=\frac{11!}{3!*8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3}=165$

Mając dany zbiór *n*-elementowy **kombinacją z powtórzeniami** elementów zbioru nazywa się każdy zestaw *k*-wyrazowy. (dlaczego napisałem tu „zestaw" a nie „ciąg" ani „zbiór" – wytłumaczę poniżej). Tak rozumiane kombinacje z powtórzeniami są rozszerzeniem kombinacji bez powtórzeń o możliwość powtarzania się elementów.

Dla jasności definicję można opisać w następujących punktach:
1) kolejność wyrazów nie jest istotna (dlatego nie jest to ciąg),
2) elementy mogą się powtarzać (dlatego nie jest to zbiór).

Dodam, że jest to chyba najrzadziej stosowany schemat liczenia kombinatorycznego.

Sposób liczenia podam na poniższym przykładzie:
Rzucamy jednocześnie trzema kostkami do gry. Ile możemy otrzymać wyników?
Zwrócić uwagę, że nie jest istotna tutaj kolejność, czyli wyniki (*5,4,2*), (*5,2,4*), (*2,5,4*), (*2,4,5*), (*4,2,5*) i (*4,5,2*), to ten sam wynik, a zatem należy go liczyć jako jeden wynik.
Mamy:
- liczba elementów w zbiorze: $k = 3$,
- liczba ścianek na kostce, czyli zbiór elementów: $n = 6$.

Wzór z którego obliczamy to: $\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$.

Liczymy: $\bar{C}_6^3 = \frac{(6+3-1)!}{3!\cdot(6-1)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} = 7\cdot 8 = 56$

Wariacja z powtórzeniami
Przyjmijmy, że mamy dany zbiór elementów (np. zbiór liter). Wariacja z powtórzeniami pozwala na utworzenie ciągu z elementów tego zbioru, z tym, że dopuszcza powtarzanie elementów. Korzystamy w celu z następującego wzoru: $\mathrm{W}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{n}^{\mathrm{k}}$.

Przykład Ile słów czteroliterowych (nawet tych, które nie mają żadnego sensu) można utworzyć z liter: *a*, *b* i *c*?
Rozwiązanie: Przykładami takich słów są: aaaa, aabc, cbcb. Na każdym z *4* miejsc może stać jedna z *3* liter, którymi dysponujemy, zatem wszystkich możliwości mamy: $3^4 = 81$.

Wariacja bez powtórzeń
Przyjmijmy, że mamy dany zbiór elementów (np. zbiór liter). Wariacja bez powtórzeń pozwala na utworzenie ciągu z elementów tego zbioru, z tym, że nie dopuszcza powtarzania elementów. Wzór na wariację bez powtórzeń jest następujący: $\mathrm{V}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Przykład Ile istnieje sześciocyfrowych kodów BLIK składających się z różnych cyfr?
Rozwiązanie: Mamy do dyspozycji *10* cyfr: *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* i *9*.
Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest $\frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 151.200$.
Moglibyśmy to też policzyć bez tego wzoru, „na piechotę":
Mamy *6* pozycji:
- na I pomożemy postawić jedną z *10* cyfr,
- na II (w każdej z tych sytuacji) jedną z pozostałych *9*,
- na III (w każdej z tych sytuacji) jedną z pozostałych *8*,
- na IV (w każdej z tych sytuacji) jedną z pozostałych *7*,
- na V (w każdej z tych sytuacji) jedną z pozostałych 6,
- na VI (w każdej z tych sytuacji) jedną z pozostałych *5*.

Tym samym tych sytuacji mamy razem: $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 151.200$.

2. Prawdopodobieństwo - jaką mam szansę na osiągnięcie sukcesu (tj. że szczęście będzie mi sprzyjać)?

Prawdopodobieństwo („po mojemu" – przypadkowość) – to stosunek (iloraz) liczby zdarzeń sprzyjających zajściu jakiegoś zdarzenia do liczby wszystkim możliwych zdarzeń. Np. prawdopodobieństwo wypadnięcia „*6*" w jednokrotnym rzucie kostką wynosi $\frac{1}{6}$, bo na *6* możliwych zdarzeń (*1*, *2*, *3*, *4*, *5* i *6*) tylko jedno (*6*) sprzyja temu zdarzeniu.

Z kolei prawdopodobieństwo wypadnięcia parzystej liczby oczek w jednokrotnym rzucie kostką wynosi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,bo na 6 możliwych zdarzeń (*1*, *2*, *3*, *4*, *5* i *6*) trzy (*2*, *4* i *6*) sprzyjają temu zdarzeniu.

Jak widzimy, prawdopodobieństw jest tutaj ułamkiem właściwym, a więc przyjmuje wartość z przedziału $(0, 1)$.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia „*8*" wynosi $\frac{0}{6} = 0$ – jest to tzw. zdarzenie niemożliwe.

Z kolei prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek wyrażającej się jednocyfrową liczbą naturalną (możliwe wyniki, to: *1*, *2*, *3*, *4*, *5* i *6*) wynosi $\frac{6}{6} = 1$ – jest to tzw. zdarzenie pewne.

Tak więc prawdopodobieństwo zawsze wyraża się wartością z przedziału <0, 1>.

Własności rachunku prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia losowego *A* jest zawsze liczbą z przedziału $< 0, 1 >$: $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe *1*: $P(\Omega) = 1$
3. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe *0*: $P(\emptyset) = 0$
4. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: $P(A') = 1 - P(A)$
5. Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
7. Prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia *A*, pod warunkiem zajścia zdarzenia *B*, liczymy ze wzoru:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, gdzie $P(B > 0)$.

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli zdarzenia B_1, B_2,... , B_n, są parami rozłączne oraz mają prawdopodobieństwa dodatnie, które sumują się do jedynki, to dla dowolnego zdarzenia *A* zachodzi wzór:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

3. Podstawowe pojęcia statystyczne

Wyraz "**statystyka**" ma dwa znaczenia:

- z jednej strony oznacza **naukę** o uproszczonym opisie liczbowym dużych zbiorowości
- z drugiej zaś strony każdy z tego typu **opisów**.

W ramach statystyki (w pierwszym z powyższych znaczeń) mamy pewną **populację**, którą opisujemy pod **pewnym względem** w oparciu o

- wszystkie **obiekty** tej populacji (gdy nie jest za wielka lub gdy choć jest duża, to jednak mamy odpowiednie środki /czas, pieniądze, osoby do przetwarzania danych/)
- lub jedynie jej część (zwaną **próba**).

Aby opis całej populacji w oparciu o próbę był **wiarygodny** (niewiele różniący się od sytuacji gdybyśmy badali całą populację) – owa próba musi być:

- odpowiednio duża (w Polsce na przebadanie opinii publicznej ogółu dorosłych osób taka próba zwykle ma *1.000-1.100* elementów – osób),
- reprezentatywna (ludzie z różnych rejonów kraju, z miejscowości o różnej liczbie ludności, o różnej płci, o różnym wykształceniu, w różnym wieku, różnych zawodów, …).

Przy zachowaniu tych warunków wynik badania próby będzie bardzo zbieżny z wartością dla całej populacji (gdyby takie badanie zrobić), a badanie to będzie od niego kilkadziesiąt tysięcy razy tańsze!

Poniżej omawiam różne rodzaje tzw. statystyk, tj. wartości statystycznych (jest to drugie – z przytoczonych na początku tego paragrafu – rozumień słowa „statystyka”).
Pryz tym posługuję się następującym przykładem:
Mamy *10* osób, odpowiednio w wieku lat: *10, 9, 8, 9, 9, 8, 8, 10, 9, 30.*
Najpierw porządkujemy je w kolejności rosnącej: *8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 30*
a następnie ujmujemy je w następującej tabeli

LP	1	2	3	4
wiek	*8*	*9*	*10*	*30*
liczba osób	*3*	*4*	*2*	*1*

LP	Nazwa statystyki	Jej definicja i opis	Jej obliczenie dla naszego przykładu
1	Średnia arytmetyczna	Sumujemy poszczególne wyniki i tak obliczoną sumę dzielimy przez ich liczbę: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$	$\bar{x} = \frac{8+8+8+9+9+9+9+10+10+30}{10} = \frac{100}{10} = 10$
2	Średnia ważona	1) Sumę powtarzających się danych zamieniamy na iloczyn. Jest to „ułatwiona” średnia arytmetyczna.	$\bar{x} = \frac{3\cdot 8 + 4\cdot 9 + 2\cdot 10 + 1\cdot 30}{10} = \frac{100}{10} = 10$
		2) **różnicujemy dane ze względu na „wagi”** – np. oceny różnych kategorii mają różne wagi: sprawdzian – *3*, odpowiedź, kartkówka – *2*, praca domowa – 1. $\overline{x_w} = \frac{x_1\cdot w_1 + x_2\cdot w_2 + \cdots + x_n\cdot w_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$	Oddzielny przykład – mamy (dla wag jak obok) oceny: ze sprawdzianu *2* i *5*, z odpowiedzi *4*, z pracy domowej *1*. Wtedy: $\overline{x_w} = \frac{2\cdot 3 + 5\cdot 3 + 4\cdot 2 + 1\cdot 1}{3+3+2+1} = \frac{6+15+8+1}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$
3	Mediana	W uporządkowanym ciągu wyników jest to: a) **wartość środkowa** – gdy mamy nieparzystą liczbę wyników; np. gdy *7* wyników – to jest to wartość *4*. (*3* są przed nią i *3* są za nią) b) średnia arytmetyczna z dwóch wartości przyśrodkowych – gdy jest parzysta liczba wyników; np. gdy mamy *8* wyników, to bierzemy wartość *4*. i *5*. i liczymy z nich średnią arytmetyczną (tj. dodajemy je i wynik dzielimy przez *2*)	*8, 8, 8, 9, <u>9</u>, <u>9</u>, 9, 10, 10, 30* – podkreśliłem dwie przyśrodkowe wartości. $x_m = \frac{9+9}{2} = \frac{18}{2} = 9$
4	Moda, dominanta	Jest to taka wartość, która **najczęściej występuje** (dominuje, jest najbardziej „modna”). Gdy jest kilka takich wartości – to każda z nich jest modą / dominantą	$x_d = 9$ (ta wartość występuje najczęściej, bo aż 4 razy)
5	Odchylenie	Jest to wartość **pomocnicza** do obliczenia wariancji. Odchylenie wartości x_i od średniej arytmetycznej ma wartość wyrażoną w następujący sposób: $x_i - \bar{x}$	U nas odchylenia wynoszą: • dla *8*: $8 - 10 = -2$, • dla *9*: $9 - 10 = -1$, • dla *10*: $10 - 10 = 0$, • dla *30*: $30 - 10 = 20$.
5	Wariancja	Wariancja liczb x_1, x_2,..., x_n to średnia arytmetyczna kwadratów odchyleń od ich średniej arytmetycznej: $\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$ Jest wartością **pomocniczą** do obliczenia	$\sigma^2 = \frac{3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-1)^2 + 2\cdot 0^2 + 1\cdot 30^2}{10} = \frac{12+4+0+900}{10} = \frac{916}{10} = 91{,}6$

		odchylenia standardowego.	
6	Odchylenie standardowe	Załóżmy że mamy dane liczby x_1, x_2,..., x_n oraz że ich średnia arytmetyczna wynosi $\bar{x}$. Wówczas odchylenie standardowe tych liczb od ich średniej arytmetycznej, to pierwiastek kwadratowy z wariancji, czyli: $$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$	$\sigma = \sqrt{91{,}6} \approx 9{,}57$
7	Kwadryle	Mediana wskazuje wartość środkową i równocześnie rozdziela wszystkie sytuacje na 2 części – połowę mniejszych od owej mediany i połowę większych od niej. Jeśli tak otrzymane połówki znowu analogicznie podzielimy na ich (z kolei) połówki – to w sumie otrzymamy 3 „punkty" podziału całego ciągu uporządkowanego na ćwiartki. Jeżeli są to zestawienia zarobków pracowników jakiejś fabryki – to owe ćwiartki (zwane kwadrylami) obrazują: 1) pierwsza – do jakiej kwoty zarabia pierwsze *25%* pracowników, 2) druga – drugie (inaczej: pierwsze poniżej średniej) *25 %* pracowników 3) trzecia – trzecie (inaczej: pierwsze powyżej średniej) **25 %** pracowników 4) czwarta – ostatnie (najwyższe) *25 %* pracowników	Jak wiemy dla ciągu *8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 30 mediana wynosi 9:* (tu podział na połowę oznaczam kreską pionową: |): *8, 8, <u>8</u>, 9, 9 | 9, 9, <u>10</u>, 10, 30.* Następnie podkreśleniami zaznaczyłem środkowe wartości tych połówek. Tak więc punkty rozgraniczające kwadryle mają odpowiednio wartość: *8*, *9* i *10* Przykładowy rozkład kwadryli w przypadku pensji - podaję poniżej: I ćw. II ćw. III ćw. IV ćw. *2.000* *5.500* *7.000* Środkowa połowa pracowników zarabia więc od *2.000* do *7.000* zł

Szerszej napiszę tu jeszcze o odchyleniu standardowym. Otóż określa ono jak średnio od średniej arytmetycznej oddalone są poszczególne dane. im większa jest to wartość – tym większa jest to odległość.
O odchyleniu standardowym mówi się, że jest to **miara rozproszenia**, przy czy w tym ujęciu im większa jest to wartość tym bardzie te dana są rozproszone od średniej arytmetycznej, a im mniej - tym bardziej są wokół niej skupione.
Należy zwrócić uwagę, że odchylenie standardowy należy ściśle odnosić do średniej arytmetycznej. Otóż odchylenie standardowe o wartości *5*:

- od średniej arytmetycznej *10* daje $\pm$ 50%,
- od średniej arytmetycznej 100 daje $\pm$ 5%.

Podaje się te statystyki, aby móc łatwo „ogarnąć" bardzo dużą liczbę danych. Statystyki te trzeba jednak umieć odpowiednio zinterpretować, aby nie było jak w tym dowcipie:
Jak ktoś opiera się plecami o piecyk, a nogi ma w zamrażalniku – to jest mu średnio ciepło. :)

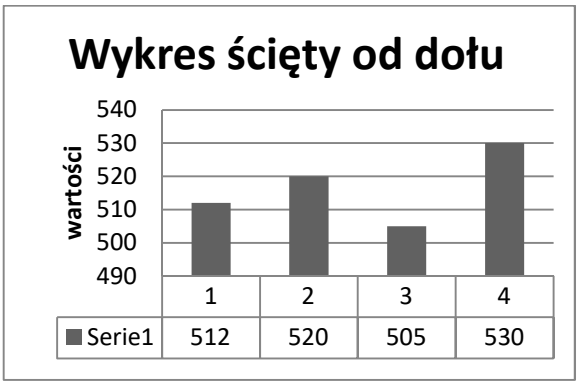
4. Prezentacje danych (różne rodzaje wykresów, grafy, tabele)

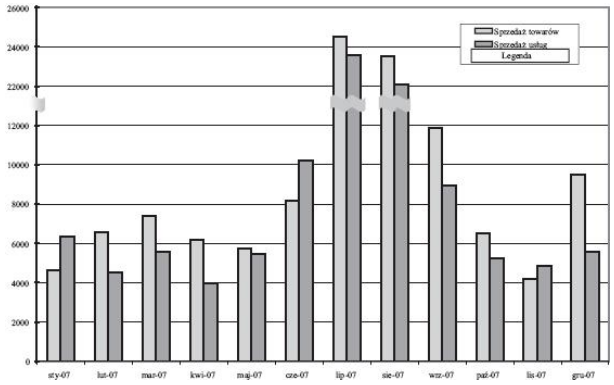
Dane liczbowe możemy oddawać za pomocą liczb, ale i w sposób graficzny, czy też inny schematyczny (np. za pomocą diagramu, tabeli, mapy z ludzikami reprezentującymi np. liczebność wrogich sobie armii, itp.)

Dzięki prezentacji graficznej możemy „jednym rzutem oka" rozeznać się w sytuacji - dlatego jest ona szczególnie wygodna i użyteczna. Ta jej zaleta (prostota, łatwy odczyt pod względem mentalnym) ma niestety też swoje mankamenty:

3) Ponieważ z grafiki możemy jedynie w sposób przybliżony odczytać stosowne wartości (tracić wtedy dokładne ich wartości) - dlatego najlepiej jest wtedy ów wykres czy schemat zaopatrzyć dodatkowo w dokładnym opis liczbowy.
4) Jeśli na wykresie będziemy coś reprezentować za pomocą dajmy na to trójkątów różnej wielkości – to nie jest wiadomo, czy wartości te reprezentowane są przez ich wysokość, czy może pole (a jak wiemy, pole rożnie z kwadratem zmian wysokości figur podobnych).

5) Gdy pojedyncze wartości odbiegają od pozostałych w górę – to można je ściąć (wyjmując jak gdyby wewnętrzną górną część wykresu – jak widzisz robi się to za pomocą podwójnej falki). Ten zabieg daje możliwość łatwego porównania małych wartości, ale już nie oddaje stosunku wielkości bardzo małych i bardzo dużych. Sytuację tę przedstawia wykres poniżej po prawej stronie.
6) W końcu gdy mamy same bardzo duże wielkości niewiele różniące się od siebie – to możemy ściąć je u dołu o tyle samo. Zabieg ten wykonuje się analogicznie jak powyżej, z tym że w wewnętrznej DOLNEJ części wykresu, lub po prostu poprzez jego zaczęcie od pewnej dużej wartości – tak właśnie ja to tu przedstawiam, od 490. Wtedy co prawda wyraźnie widzimy RÓŻNICE między nimi, lecz niestety na wykresie gubimy proporcje tych wartości (wykres poniżej po lewej stronie).





Podajmy jeszcze jakie mamy podstawowe typy wykresów:

Jeżeli mamy do czynienia z funkcją – to za pomocą zwykłego wykresu funkcyjnego, jak i za pomocą wykresów:

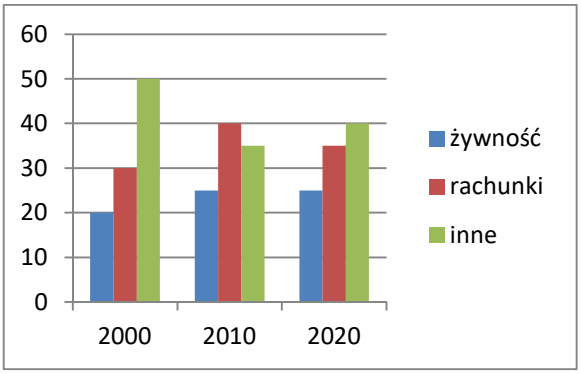
1. kolumnowego (pionowe słupki) – np. oddające kwoty sprzedaży w danym sklepie w poszczególnych miesiącach danego roku
2. słupkowego (poziome słupki) – np. oddające liczbę osób w danej grupie o danym rozmiarze buta
3. kołowego (z wycinkami jak w przypadku pizzy), przy czym wartości możemy podawać wtedy liczbowo lub procentowo – np. oddający preferencje wyborcze (na którą partię osoby z danej grupy chcą zagłosować w zbliżających się wyborach)
4. punktowe (gdy zamiast kolumn zaznaczane są tylko punkty na poziomie wysokości owych kolumn) – np. oddające temperaturę danego dnia o pełnych godzinach
5. połączonych punktów – gdy połączymy owe punkty odcinkami (często tak robią pielęgniarki na kartach szpitalnych pacjentów), jednak wtedy owe odcinki niekoniecznie będą oddawała poprawnie temperaturę jaka miała miejsce między owymi pomiarami
6. liniowy - gdy będziemy na nim oddawali temperaturę w sposób ciągły.

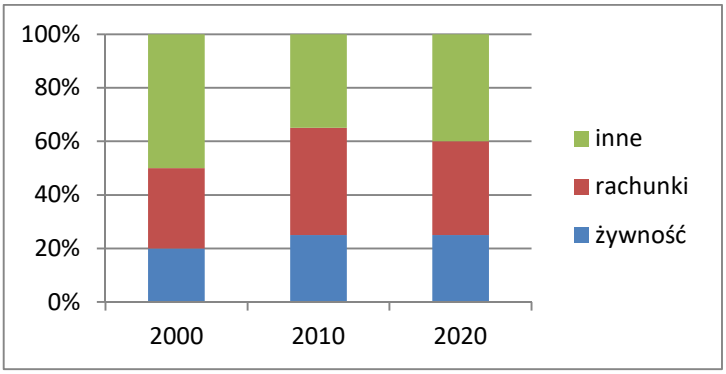
Tak więc:

- wykresy *1 - 4* oddają sytuacje dyskretne,
- wykres *5* – sytuację ciągłą w oparciu o pomiary dyskretne,
- wykres *6* – sytuację ciągłą.

Od razu zauważmy, że wykres typu *5* kompletnie nie nadaje się do oddania sytuacji z wykresu z sytuacji np. *1* (wysokość sprzedaży w poszczególnych miesiącach), bo przecież nie ma miesiąca dajmy na to *3,78*! Trzeba więc bardzo uważać przy pomocy jakiego wykresu chcemy oddać daną sytuację.

Możesz też na jednym wykresie mieć przedstawionych zestawienie wielu sytuacji, jak np. poniżej procentowe wydatki w gospodarstwie domowym w 3 różnych latach i w 3 różnych kategoriach:





Dane można też prezentować za pomocą grafów (te zwykle oddają zależności między opisywanymi obiektami czy wartościami (ja tak zrobiłem przy podatkach!) czy w tabelach (gdy są one bilansami – wówczas suma wartości kolumn musi być równa sumie wartości z wierszy – to znaczy że tabela się bilansuje, że nie popełniliśmy błędu przy sumowaniu owych wierszy i kolumn).

XIV. PRAWIDŁA NATURY

1. Przechadzki wśród liczb godnych uwagi

a) Pi (co kołem się nie-toczy)

Pi – to liczba o wartości ***3,14159…***

Π (czyt. *pi*) – to stosunek obwodu koła (czyli długości okręgu) do długości jego średnicy; stosunek ten jest niezależny od wyboru koła, ponieważ każde dwa koła są podobne. Liczba π nazywana jest czasami ***ludolfiną***. Nazwa ta pochodzi od Ludolpha van Ceulena, który zasłynął tym, że przedstawił ją z dokładnością do *35* miejsc po przecinku: $\pi \approx 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$.

W praktyce korzysta się z przybliżonych wartości *3,14*, rzadziej z przybliżeń dokładniejszych: *3,14159* albo w postaci ułamków zwykłych, np. $\frac{22}{7}$ (≈ *3,142857…*, a więc mamy przybliżenie z dokładnością do *2* miejsc po przecinku) lub $\frac{355}{113}$ (≈ *3,14159292…*, co daje nam przybliżenie z dokładnością do *6* miejsc po przecinku!).

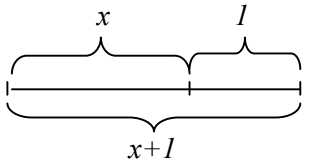
*Jak myślisz? – **Dlaczego „pi kołem się nie-toczy?”**.*
– Bo choć dotyczy koło, to wcześniej do obliczeń trzeba je zaokrąglić ☺

Liczba π jest stałą matematyczną, która pojawia się w wielu działach matematyki i fizyki. W geometrii występuje np. we wzorach na pole i obwód koła, czy pole i objętość brył obrotowych (kuli, walca i stożka). Można ją spotkać również w bardziej zaawansowanej dziedzinie matematyki, jaką jest analiza matematyczna.

b) Podział złoty i liczba φ (czyt.: fi)

Może słyszałeś o złotym podziale? Chodzi o to, by podzielić odcinek na dwie części w ten sposób, by stosunek długości dłuższej części do krótszej miał się tak samo, jak stosunek długości całego odcinka do dłuższego.

Przyjmijmy, że dłuższy odcinek ma długość *x*, a krótszy odcinek ma długość 1. Wtedy ich iloczyn $\frac{x}{1} = x$ da nam właśnie liczbę fi (φ).



Otrzymujemy równanie: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$. (*)

Rozwiązuje się je mnożąc „na krzyż”: $x \cdot x = 1 \cdot (x+1)$

$x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$ - jest to równanie kwadratowe, które liczy się za pomocą delty:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 5 = 5 > 0$

Ponieważ owa Δ jest dodatnia, zatem mamy 2 pierwiastki (rozwiązania):

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Ponieważ pierwszy z tych wyników jest dodatni, a drugi ujemny – pierwszy zostawiamy, a drugi odrzucamy (bo x oznacza długość odcinka, a ta nie może być ujemna!).

Tak więc $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803\ 39887 \approx \mathbf{1,618}$. Liczę tę nazywamy złotą proporcją i oznaczamy literą φ (fi)

Zobaczmy ile wynosi stosunek odwrotny:

$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1\cdot(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}61803\ 39887$, czyli $1 - \varphi$.

Z zależności (*) otrzymujemy, że długość owego dłuższego odcinka jest średnią geometryczną długości krótszego odcinka i całego odcinka.

Tyle (w skrócie) na jego temat mówi matematyka.

Złoty podział (łac. *sectio aurea*) zwykło się też nazywać: **podział harmoniczny**, **złota proporcja**, **złoty stosunek**, **boska proporcja** (łac. *divina proportio*), ze względu na jego piękno, doniosłość i powszechność.

Złoty podział, ze względu na jego estetykę (czujemy, że coś jest piękne, jeśli jest oddane w tej właśnie proporcji; złoty podział mamy nijako zakodowany w oku), już od starożytności wykorzystuje się często w estetycznych, proporcjonalnych kompozycjach architektonicznych, malarskich, rzeźbiarskich czy (tu oczywiście dopiero od wynalezienia fotografii) fotograficznych, itp.

W budownictwie i sztuce tworzy się dzieła z zachowaniem złotego stosunku – szczególnie w formie **złotego prostokąta**, w którym stosunek dłuższego boku do krótszego jest równy złotej proporcji (zgodnie z poglądem, że takie proporcje wyglądają estetycznie). Złoty prostokąt może być rozcięty na kwadrat i mniejszy prostokąt o tych samych proporcjach co rozcinany, i ten dalej analogicznie, i tak dalej w nieskończoność… .

Tego typu proporcje spotykamy tez w naturze: odległościami między kolejnymi liśćmi na łodydze, budowie ciała człowieka, czy budowie spiralnych muszli.

Złoty podział jest także używany w analizie rynków finansowych, jako że jest powiązany z **ciągiem Fibonacciego**.

Poniżej pokrótce opowiem Ci o tym niezwykłym ciągu i owej zależności.

Otóż pierwsze *2* jego wyrazy – to jedynki, a każdy następny wyraz jest sumą dwóch leżących przed nim. Mamy więc: *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...*

Iloraz: wyraz dany przez bezpośrednio poprzedzający go – jeśli coraz dalsze wyrazy ciągu będziemy tu brali pod uwagę, będzie nam dawać coraz lepsze przybliżenia liczby φ. Z drugiej strony okazuje się, że obserwując wykres zmian kursów akcji, walut, kruszców czy paliw czy innych towarów – kolejne liczby wzrostów czy spadków ich notowań, dowolnie czy brane w mikro czy w makro skali – zawsze są wyrażane przez kolejne liczby z tego ciągu.

c) Procenty maksymalne, czyli liczba e

Co jest liczba e?

Dajmy na to, że mamy oprocentowanie lokaty w skali roku *100 %*. Oznacza to, że każda złotówka po roku da nam kolejną złotówkę. Jeśli kapitalizacja będzie półroczna, to po roku za złożoną złotówkę otrzymasz (dalej wszystkie liczby zaokrąglam do *5* miejsc po przecinku): $1{,}5^2=2{,}25$ zł, kwartalna: $1{,}25^4=2{,}44141$ zł, miesięczna: $1{,}0833^{12}=2{,}6130$, tygodniowa: $1{,}01923^{52}=2{,}69260$, dzienna: $1{,}00274^{365}=2{,}71457$, ...

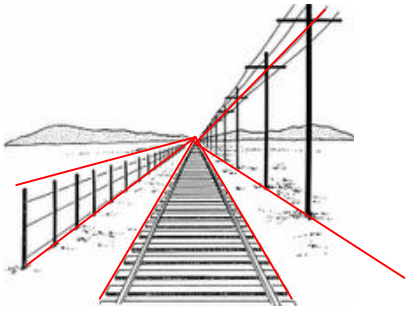
Jak widzisz - zgodnie z tym co już wiesz - im mamy drobniejsze okresy kapitalizacyjne, tym większą kwotę otrzymasz. Zastanawiasz się pewnie, co będzie jak dalej będziemy je rozdrabniać : do godzin, minut, sekund, ułamków sekund. Oczywiście cały czas będzie to coraz większa kwota, jednak mam ona swoją granicę, określana jako liczba $e = 2{,}718281828459045235360287471352662497757247093699 95$... uff ;)

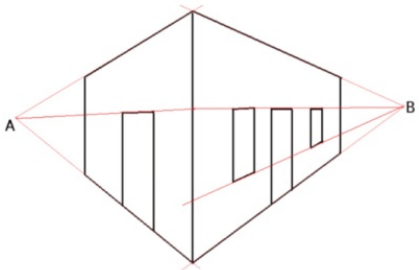
2. Posiadają trzy kąty, czyli… trójkąty

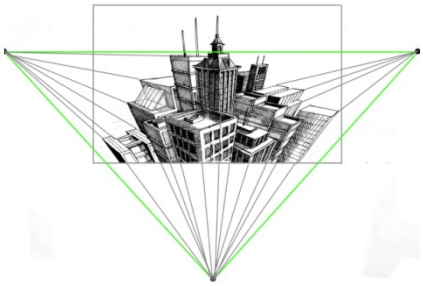
a) Perspektywa

Perspektywa – to określenie stosowane w architekturze, malarstwie, fotografii i innych sztukach wizualnych, które oznacza sposób oddania trójwymiarowych obiektów i przestrzeni na płaszczyźnie. ... W perspektywie linie równoległe do siebie stają się zbieżne i spotykają się w pewnym teoretycznym punkcie.

Perspektywa może mieć *1, 2* a nawet *3* takie punkty zbiegu:

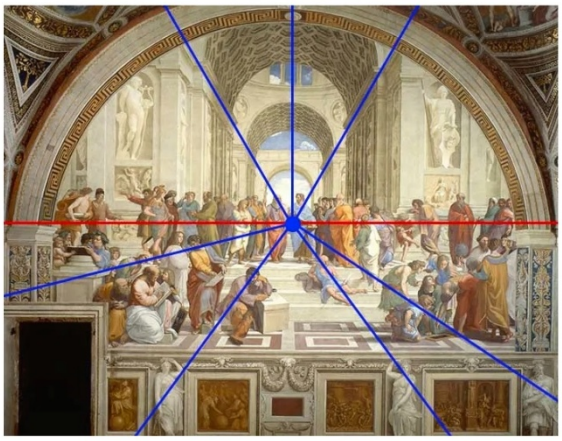




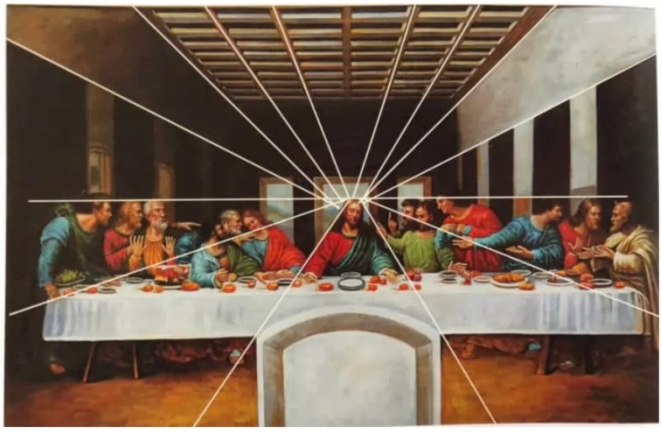


Zobacz:

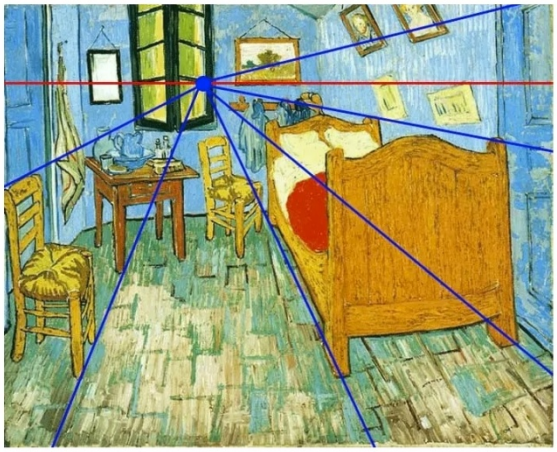
1) jak wygląda wykorzystanie perspektywy w malarstwie:



Szkoła Ateńska, Rafael Santi
Źródło: drawpaintacademy.com



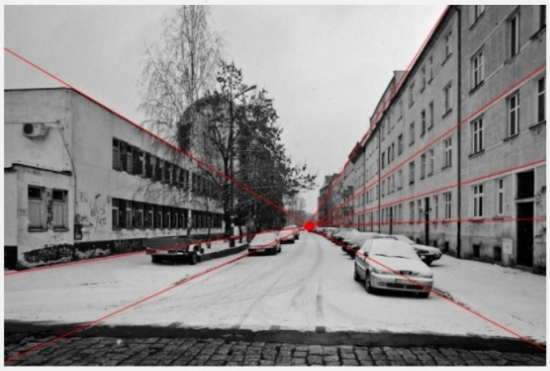
Ostatnia Wieczerza, Leonardo Da Vinci
Źródło: @MiaFarrow / twitter



Pokój Vincenta Van Gogha
Na czerwono zaznaczona linia horyzontu, niebieską kropką punkt zbiegu.
Zastosowana perspektywa jest perspektywą zbieżną.
Źródło: drawpaintacademy.com

Gustave Caillebotte; ulice Paryża; deszczowy dzień;
Źródło: https://en.wikipedia.org/

2) Jak wygląda ona w fotografii:

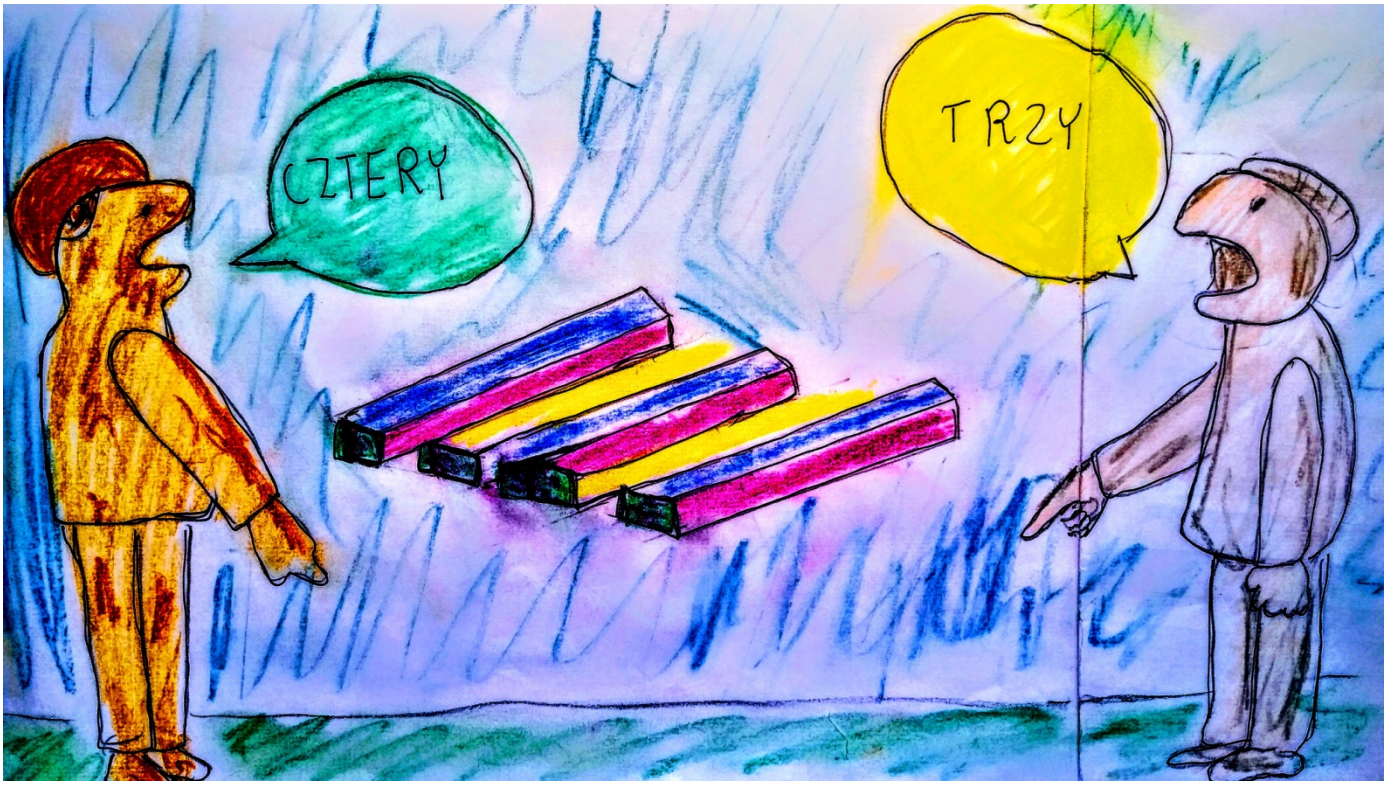


Perspektywa linearna

Perspektywa z dwoma punktami zbiegu

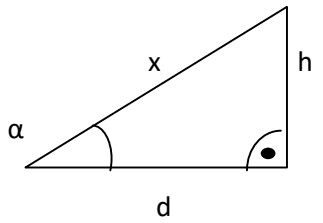
(za https://photographyvlog.wordpress.com/2012/05/22/perspektywa-w-fotografii-2/)

Na koniec: **dowcip** o perspektywie patrzenia (a co za tym idzie) i widzenia (dotyczy świata niemożliwego):



b) Pod górkę i z górki

Spójrzmy na schemat stoku (narciarskiego) czy drogi:



Co tu oznaczają poszczególne literki?:
d – to odległość horyzontalna („płaska" – taka, jaką odczytasz z mapy)
x – to odległość skośna (czyli rzeczywista)
h – to przewyższenie (różnica wysokości)
α – to nachylenie (a ściśle: kąt nachylenia)

Nachylenie trasy (samochodu czy zjazdu narciarskiego) – to inaczej jej **stromizna**. Można wyrazić ją na dwa sposoby:

1) podając **w stopniach** miarę kąta α
2) podając ją **w procentach**, obliczonych za pomocą wzoru: : $n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$

Jak łatwo zauważyć, kątowi *45°* odpowiada nachylenie równe *100 %*, kątowi mniejszemu – mniejsze nachylenie, a większemu – większe.

Poniżej pokażę Ci jak można dokonywać przeliczeń pomiędzy podanymi powyżej dwoma sposobami wyrażania tego nachylenia (w stopniach i w procentach).

Kąt α	*5°*	*10°*	*15°*	*20°*	*20°*	*45°*	*60°*	*70°*	*80°*	*85°*	*89°*
Nachylenie - ok.	*9%*	*18%*	*27%*	*36%*	*58%*	*dokł. 100%*	*173%*	*275%*	*567%*	*1143%*	*5729%*

Tutaj w oparciu o kąt (podany w stopniach) liczyłem nachylenie (w procentach). Jak ja to robiłem i jak Ty możesz to zrobić samodzielnie? Proszę bardzo: wpisujesz w wyszukiwarce google'a „kalkulator", a jak już „wyskoczy" w pierwszym rzędzie wybierasz „Deg" (rezygnując z „Rad" o ile było wcześniej ustawione), a następnie liczysz dla poszczególnych kątów w następujący sposób: wciskasz „tan" + liczba stopni + „= * *100* =" i podajesz w zaokrąglenie do liczby całkowitej.

Kąt α – ok.	*6°*	*11°*	*17°*	*22°*	*27°*	*31°*	*35°*	*39°*	*42°*	dokł. *45°*	*89°*
Nachylenie	*10%*	*20%*	*30%*	*40%*	*50%*	*60%*	*70%*	*80%*	*90%*	*100%*	*300%*

Tutaj z kolei w oparciu nachylenie (podane w procentach) liczyłem kąt (podany w stopniach). Jak ja to robiłem i jak Ty możesz to zrobić samodzielnie? Proszę bardzo: wpisujesz w wyszukiwarce google'a „kalkulator", a jak już „wyskoczy" w pierwszym rzędzie wybierasz „Deg" (rezygnując z „Rad" o ile było wcześniej ustawione), a następnie liczysz dla poszczególnych kątów w następujący sposób: wciskasz „Inw" + „$\tan^{-1}$" + liczba procent + „=" i podajesz w zaokrąglenie do liczby całkowitej.

Wykorzystywaliśmy tu:

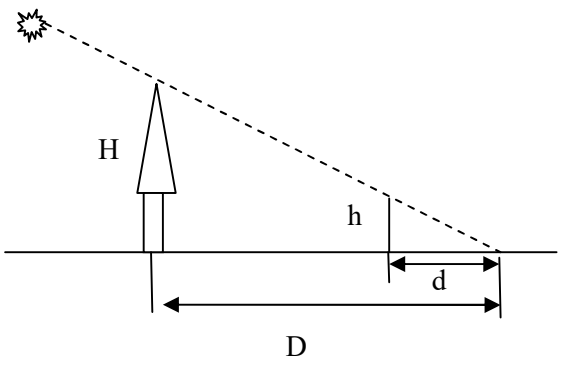
1) w pierwszym przypadku funkcję trygonometryczną tangens, która jest stosunkiem długości (jak w rysunku powyżej) h do d,
2) w drugim przypadku funkcję do niej odwrotną – tzw. arcus tangens – w kalkulatorze Google oznaczaną $\tan^{-1}$.

<u>Dopowiedzenia</u>:

1) Nachylenie trasy pojazdów szynowych podaje się w promilach (w tym celu wystarczy obliczone procenty pomnożyć przez *10*, bo *10* promili – to *1* procent)
2) Oprócz trasy (drogi, stosu) w podany wyżej sposób można również liczyć i wyrażać nachylenie np. dachu, czy ściany piramidy.

c) Proporcje w trójkątach podobnych

Jak zmierzyć wysokość drzewa (nie wdrapując się na nie)? To proste – wystarczy wykorzystać zależności występujące w trójkątach podobnych, a konkretnie fakt, że stosunki długości odpowiednich boków są w nich takie same.



Palik o wysokości (nad ziemią) h wbijasz w ziemię na drodze cienia drzewa w takim miejscu, by ich cienie kończyły się w tym samym miejscu. Wtedy – jak widzisz – mamy:

$\frac{H}{D} = \frac{h}{d}$, a stąd $h = D \cdot \frac{h}{d}$, gdzie:
H – to szukana wysokość drzewa,
a D i d – to cienie odpowiednio drzewa i palika, które to bez problemu możesz zmierzyć ☺ (podobnie jak wysokość palika h)

3. Przekształcenia:

W matematyce mamy wiele przekształceń figur i brył geometrycznych, przy czym wszystkie z tych przekształceń możemy – jak to ma miejsce w tej książce – wyrazić słowem zaczynającym się na „P" ☺

a) powiększenia

Figura czy bryła w każdym z wymiarów rośnie n-krotnie.

b) pomniejszenia

Figura czy bryła w każdym z wymiarów maleje n-krotnie.

c) przesunięcia

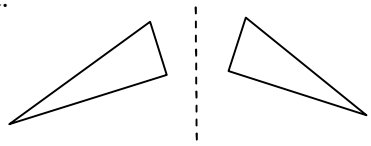
Figura czy bryła zachowuje wymiar i orientację (nie obraca się), jednak ulega przesunięciu w którymś z kierunków: w prawo, lewo, górę, dół lub po skosie (w górę czy w dół, pod dowolnym kątem).

d) przekręcenia (czyli obroty)

Figurę czy bryłę obrócić o pewien kąt (i to w dowolną stronę) można względem (czy: wokoło, co nie znaczy wcale, że o pełny kąt) pewnego punktu, i to dowolnie gdzie leżącego: wewnątrz, na brzegu, czy na zewnątrz owej figury czy bryły; figura (bryła) ta zachowuje wtedy swój rozmiar, jednak orientację już niekoniecznie… Obrót o *360* stopni zawsze spowoduje, że obraz figury nałoży się z jej „figurą matką" (tj. tą, z której ona wychodziła).

e) przełożenia na drugą stronę, czyli odbicia, czy symetrie (plus dopowiedzenie o figurach symetrycznych)

Jeśli jakąś figurę „przewrócimy na drogą stronę" – to otrzymamy figurę do niej symetryczną względem prostej odbicia:



(to tak, jakbyśmy mieli świeżą plamę z atramentu na stronie, następnie byśmy tę stronę złożyli wzdłuż jakiejś prostej, odbili tę plamę, a następnie z powrotem rozłożyli stronę).

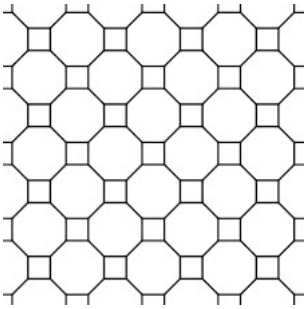
Jeśli na taką dwu-składową figurę spojrzymy jako na jedną figurę, lub w ogóle taka figura z osia symetrii jest jedno-składową, to powiemy, że jest ona osiowo-symetryczna. Takimi figurami są np. duże litery: A, C, D, H, O.
Każdą z tych liter można przełożyć na drogą stronę i otrzymać tę samą figurę – liter:

- A – względem osi pionowej,
- C i D – względem osi poziomej,
- H i O – względem osi tak poziomej, jak i pionowej.

Dodatkowo zauważmy tu, że litery H i O mają te własność, że są symetryczne wokół swego środkowego punktu (każdemu ich punktowi odpowiada „punkt bliźniak” po drugiej stronie owego środka, położony do tego w tej samej odległości od owego środka). O figurach tego typu mówimy że są środkowo symetryczne.

4. Pokrycia powierzchni (puzzle, dywany, mapy)

Sztukę pokrycia powierzchni tego samego typu obiektami (jednego, nieraz *2* lub *3* rodzajów) nazywamy parkietażem. Oto kilka przykładów (resztę możesz sobie wygooglać):



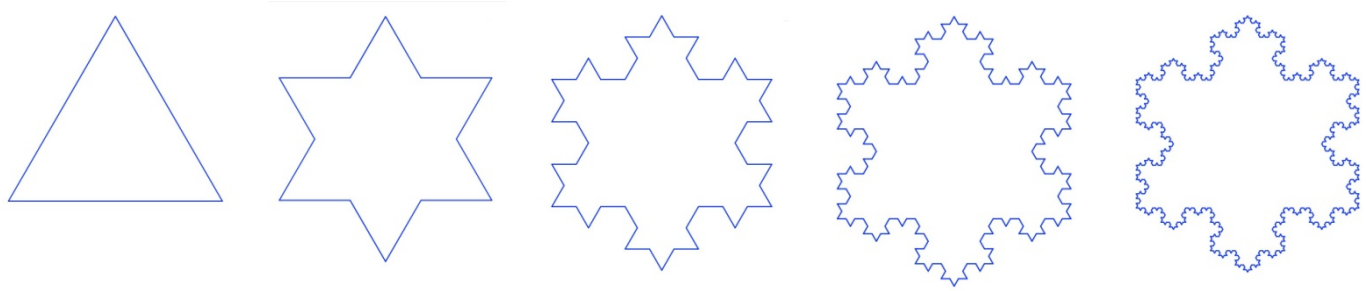
Tutaj (ze względu na ograniczenia drukarskie) dałem mozaiki czarno – białe (a właściwie: czarno-szaro-białe), ale oczywiście są i kolorowe parkietaże. Jak widzisz, mamy tu do czynienia z wielokrotnym powtarzaniem tej samej struktury układu owych „kafelków”, lecz z przesunięciami, realizowanymi w taki sposób, by rzeczywiście cała powierzchnia płaszczyzny została zapełniona. Po co się je tworzy? – do układania muru, parkietu, obrazów, kafelków, terakoty, …

Z pokryciem całej danej powierzchni mamy też do czynienie choćby w przypadku:
- ułożenia kompletnego obrazka z setek czy tysięcy pojedynczych puzzli,
- mapy kraju, gdzie wydzielone są województwa (zamiast mówić, że kraj dzieli się na województwa, można powiedzieć przecież że województwa składają się na kraj).

5. Pomniejszone powielenia, czyli fraktale

Czym jest fraktal? Jest on wielokrotną autoduplikacją danego kształtu. Przykład:

Wychodzimy od trójkąta i na środku każdego jego boku dorabiamy *3* razy mniejszy trójkąt. Następnie w przypadku każdej tak powstałej figury postępujemy analogicznie. Poniżej mamy *5* po kolei powstałych w ten sposób figur – coraz bardziej „gęstych" fraktali (poniżej – konstrukcja tzw. Krzywej Kocha):



Jak się okazuje, wiele obiektów występujących w przyrodzie ma „fraktalną" strukturę: drzewa, paprocie, kolonie koralowców, pasma górskie, …

XV. POZA PRZYRODĄ (NATURĄ) – CZYLI MATEMATYKA DOMEM BEZ DRZWI, JAK I Z DRZWIAMI POZNANIA

1. Początki matematyki i jaskinia Platona, czyli świat poza ziemską rzeczywistością

Matematyka – jako nauka – swój początek wzięła w starożytnej Grecji, a za pierwszego „z prawdziwego zdarzenia" matematyka uważa się Talesa (z Miletu). Wtedy rozwijała się głównie geometria, a więc dział matematyki którego nazwa oddaje robienie tego, czym dzisiaj zajmuje się geodezja (bo geo-metria, to inaczej ziemi-mierzenie ☺). Chodziło o to, że gdy już ludzie osiedli, by wiedzieli gdzie jest ich miejsce na ziemi ;) Wcześniej – gdy wędrowali – bardziej interesowało ich zliczanie (choćby sztuk pogłowia w stadzie, by żadne z nich nie zgubiło się po drodze).

W starożytnej Grecji ludzie zauważyli, że pojęcia matematyczne są abstrakcyjne i umieścili je w „świecie idei":

1. Uznali, że nie ma czegoś takiego jak trójkąt matematyczny w świecie realnym – bo kto widział figurę geometryczną która nie ma grubości! My mogliśmy widzieć trójkąt muzyczny (instrument perkusyjny), trójkąt samochodowy (inaczej zwany trójkątem ostrzegawczym), czy rysunek trójkąta! Samego zaś trójkąta – jako takiego – na pewno nie (chyba że jedynie w umyśle).
2. Analogicznie na pewno nikt z nas nigdy nie widział trójki. Na pewno widzieliśmy coś w liczbie *3* (np. *3* jabłka), czy zapis trójki (czyli cyfrę 3). Liczby zaś 3 jako takiej na pewno nie widzieliśmy (znowu: chyba że jedynie w umyśle).

Przyjmujemy – za Platonem – że obiekty realne są jedynie pewnymi obrazami tych idealnych ze świata idea.

Platon na tę okoliczność „zbudował" (tj. a jedynie stworzył konstrukt myślowy) DOM BEZ DRZWI, czyli jaskinię, zwaną oczywiście „jaskinią Platona". Wyobraził on sobie mianowicie ludzi siedzących na podłodze z jaskini, przykutych łańcuchami tak, że wszyscy twarzami zwróceni są na jedną ścianę i nie mogą przekręcić głowy. Na

ścianie tej widzą cienie tego, co dzieje się za nimi, a powidok ten otrzymujemy dzięki znajdującym się jeszcze dalej za nimi pochodniami.

My ponoć mamy być jako i oni – nie widzieć prawdziwego świata, lecz jedynie jego obraz. Analogicznie jest w przypadku obiektów matematycznych – w świecie w którym żyjemy nie widzimy ich, lecz jedynie ich obrazy (czy odzwierciedlenia – myślę, że w tym przypadku to słowo lepiej oddaje nam tę sytuację).

2. Przypadki z nieskończonością i o drzwiach w Krainie Matemagii

Takim pojęciem abstrakcyjnym, którego odpowiednik trudno jest znaleźć w świecie realnym jest pojęcie nieskończoności (no, chyba że w odniesieniu do Boga, ale to już inna sprawa…).

W matematyce nieskończoność mamy na prostej czy osi liczbowej (wszak są one z obu stron nieskończone). Nieskończony jest też zbiór liczb naturalnych: *1, 2, 3, …*

Nieskończoność możemy też „zrobić" „z niczego" - utworzymy mianowicie zbiór nieskończony złożony z następujących obiektów:

- $\emptyset$ - zbiór pusty,
- $\{\emptyset\}$ - zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty,
- $\{\{\emptyset\}\}$ - zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty,
- …

Oczywiście każdy z tych obiektów jest różny. Tym samym zbiór utworzony z tych elementów: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$ jest nieskończony (choć – w rzeczy samej – jest to takie „wielkie nic"!)

Jeśli coś jest wieczne (nieskończone czasowo), to znaczy, że jest to:

- odwieczne, tj. bez początku
- i dowieczne, a więc bez końca.

(pióro wieczne na pewno nie jest wieczne, lecz – jeśli już – to co najwyżej dowieczne /bo ma początek/).

O nieskończoności może nas też czegoś nauczyć tzw. Hotel Hilberta (fikcyjny hotel pana Hilberta). Jest to hotel, który posiada jedynie pokoje jednoosobowe i ma ich nieskończenie wiele (mają one numery odpowiednio: *1, 2, 3, …*). Zawiaduje nim portier, który musi się wykazać przed właścicielem gospodarnością w zarządzaniu tym hotelem i jego pokojami:

- zawsze musi domeldować nowych gości (bez względu na to ile pokoi jest już zajętych),
- zawsze musi zadbać o to, by jak najwięcej pokoi było zajętych (inaczej mógłby być uznany za niegospodarnego!)

Wyobraźmy sobie następujące sytuacje:

1) Wszystkie pokoje są zajęte, a chce się zameldować *1* gość. Jak portier powinien zaradzić tej sytuacji?
   To proste! Wystarczy, że każdego z lokatorów portier przesunie do pokoju o numerze o *1* większym (zawsze jest to wykonalne), a nowego gościa zakwateruje w pokoju nr *1*).
   W świecie matematyki oznacza to, że $\infty + 1 = \infty$.
2) Wszystkie pokoje są zajęte, a chce się zameldować *4*-osobowa rodzina. Jak portier powinien zaradzić tej sytuacji?
   To proste! Wystarczy, że każdego z lokatorów portier przesunie do pokoju o numerze o *4* większym (zawsze jest to wykonalne), a nowych przybyszy zakwateruje w pokojach o nr *1 - 4*).
   W świecie matematyki oznacza to, że $\infty + 4 = \infty$.
3) Wszystkie pokoje są zajęte, a chce się zameldować też nieskończenie wielu nowych gości. Jak portier powinien zaradzić tej sytuacji?
   To proste! Wystarczy, że każdego lokatorów portier przesunie do pokoju o numerze *2* razy większym (a więc do pokoi o parzystych numerach), a nowych przybyszy zakwateruje w pokojach o numerach nieparzystych (jest ich akurat nieskończenie wiele!).
   W świecie matematyki oznacza to, że $\infty + \infty = \infty$.
4) Wszystkie pokoje są zajęte, a *10* gości chce się wymeldować. Jak w tej sytuacji powinien postąpić portier?

To proste! Po ich wymeldowaniu powinien pozostałych gości „podobijać” do pokoi o numerach mniejszych – w ten sposób zagwarantuje, że wszystkie pokoje ponownie będą zajęte! (mimo że nikt się nie domeldował!)
W świecie matematyki oznacza to, że $\infty - 10 = \infty$.

5) Wszystkie pokoje są zajęte, i nieskończenie wielu gości chce się wymeldować. Jak w tej sytuacji powinien postąpić portier?
To proste! Po ich wymeldowaniu powinien pozostałych gości „podobijać” do pokoi o numerach mniejszych. W tym jednak przypadku możemy mieć niestety nieskończenie wiele sytuacji:
   - może się okazać, że wszystkie pokoje będą puste (gdy wszyscy się wyprowadzą),
   - może się okazać, że tylko *1* pokój pozostanie zajęty (gdy wszyscy bez jednego lokatora się wyprowadzą),
   - …
   - może się okazać, że wszystkie pokoje nadal pozostaną zajęte! (gdy np. wyprowadzą się goście z co *5*-go pokoju, a portier następnie pozostałych gości „podobija” do pokoi o mniejszych numerach).

   W ten sposób widzimy, że $\infty - \infty$ może być równe odpowiednio: *0, 1, ...,* ∞, a ponieważ nie mamy tu konkretnego wyniku – mówimy, że $\infty - \infty$ jest to wartość nieokreślona!

Już wiesz jak się bawią matematycy – wymyślając sobie i analizując jakie historyjki!

Zapewne z niecierpliwością oczekujesz DRZWI, o których była mowa w tytule tego rozdziału i tego paragrafu!

Otóż sięgnijmy do filmu „Kaczor Donald w Krainie Matemagii (napisy pl)” (https://www.youtube.com/watch?v=tnLsJZobnq0). Rzecz dzieje się w Krainie Matemagii. Jest to kraina wielkiej przygody. Kaczor Donald (linie oznaczone „[DONALD:]”) rozmawia w niej z duchem – prawdziwym duchem przygody, który jest dla niego przewodnikiem w wyprawie przez cudowną krainę matematyki.

Począwszy od 25:33 mamy tam następujący tekst:

Umysł jest miejscem narodzin każdego osiągnięcia naukowego człowieka.
Umysł nie zna granic, gdy jest właściwie używany.
Pomyśl o pentagramie, Donaldzie.
Teraz umieść kolejny wewnątrz. I trzeci, i czwarty.
Nie ma tak ostrego ołówka, by kreślić tak doskonale, jak potrafisz myśleć
i tak wielkiego arkusza papieru, by pomieścić twoją wyobraźnię.
Tylko w umyśle możesz wyobrazić sobie nieskończoność.
Matematyczne myślenie otwiera drzwi ekscytujących przygód świata nauki.
[DONALD:] *Zwariuję! Nigdy w życiu nie widziałem tyli drzwi.*
Każde odkrycie prowadzi do wielu kolejnych.
Nieskończony ciąg.
[DONALD:] *Hej, hej! Co jest za tymi drzwiami?!*
[DONALD:] *Ej, nie chcą się otworzyć! Są zamknięte!*
Oczywiście, że są zamknięte. To są drzwi przyszłości, a kluczem jest…
[DONALD:] *Matematyka!*
Tak, matematyka!
Bezgraniczna skarbnica nauki jest zamknięta za tymi drzwiami.
W swoim czasie zostaną otwarte
przez ciekawskie i żądne wiedzy umysły przyszłych pokoleń.
Jak napisał Galileusz, Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat.

Jak więc widzisz – obecny gmach matematyki (w odróżnieniu od pierwotnego – jaskini Platona) ma nieskończenie wiele drzwi, przy czym nieskończenie wiele z nich jest jeszcze zamkniętych, a jak tylko będziemy je otwierać – kolejne zamknięte będą się nam ukazywać! Jest więc co robić, by je wszystkie pootwierać, a więc matematycy na pewno będą mieli co robić „do końca świata i jeden dzień dłużej”

Nieco wcześniejszy tekst z tego filmu (od 21:58) nawiązuje do poprzedniego paragrafu – że wszelka działalność matematyczna odbywa się w mózgu, dodając, że w związku z tym musi być ona na to zawczasu dobrze przygotowany:

Teraz jesteś gotów na najbardziej ekscytującą z wszystkich gier.

[DONALD:] *O, rety!*
Polem tej gry jest umysł.
O-o, spójrz na stan twojego umysłu!
Stare pomysły, partactwo, fałszywe koncepcje,
przesądy, bałagan!
Żeby dało się myśleć, musimy tu posprzątać.
No, mniej więcej. Pozamiatane.

Oraz jeszcze jeden, jeszcze wcześniejszy, tekst (od 12:43):

Obfitość matematycznych form przywodzi na myśl słowa Pitagorasa:
Wszystko jest ułożone według liczb i figur matematycznych.
Tak, matematyka jest w muzyce, w sztuce, niemal we wszystkim.
I tak jak przypuszczali Grecy, zasady są zawsze takie same.
I jak Donaldzie, podobała Ci się geometryczna wyprawa?
[Donald:] *Jej, panie Duchu, matematyka to znacznie więcej niż dwa razy dwa.*
Zgadza się Donaldzie. (...)

Tu przyszedł mi jeszcze na myśl pewien **dowcip** o nieskończoności, więc go przytoczę:

Czym różni się Pan Bóg od asystenta (na uczelni)?
- Pan Bóg jest nieskończenie miłosierny, a asystent – niemiłosiernie ograniczony ;)

XVI. PRZYDATNOŚĆ MATEMATYKI; PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI; POTĘGA MATEMATYKI; PRZEOBFITY KIELICH DOBRODZIEJSTW MATEMATYKI; PRZEGLĄD POZOSTAŁYCH ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI – BYŚ WIEDZIAŁ, ŻE MATEMATYKA POTĘGĄ JEST! (nie mogłem się zdecydować który dać tytuł, więc dałem wszystkie ☺; wszystkie oczywiście na „P”)

Dobrnęliśmy do ostatniego rozdziału! Pora, abym podał Ci garść informacji o pozostałych zastosowaniach matematyki, w stosunku do tych, z którymi już Cię zapoznałem. Jak zaraz zobaczysz - kielich dobrodziejstw matematyki jest przeobfity!

W rozdziale VII pokazałem Ci jak przekształcać wzory, w tym zasadę trójkąta, którą wyłuszczyłem Ci odnosząc się do wzoru na prędkość (że jest ilorazem drogi przez czas). Prędkość jest więc pochodną tych dwóch pozostałych wartości. Jak się okazuje, bardzo dużo innych wartości liczy się w analogiczny sposób, np.:

1) gęstość – to liczba jednostek jakichś obiektów na daną jednostkę powierzchni czy objętości (tak liczymy np. gęstość materiału, czy gęstość zaludnienia),
2) ciężar właściwy – to ciężar materiału przypadający na jednostkę objętości,
3) natężenie prądu – to iloraz jego napięcia do oporu przewodnika, …

Dalej zobaczmy **przykładowe zastosowania matematyki w poszczególnych dziedzinach wiedzy**:

a) W zakresie geografii mamy:

Bilans migracyjny *(inaczej:* ***bilans demograficzny zewnętrzny****) = liczba imigrantów – liczba emigrantów*

Bilans demograficzny wewnętrzny *= liczba narodzin – liczba śmierci*

Bilans demograficzny *= bilans demograficzny wewnętrzny + bilans demograficzny zewnętrzny = (liczba urodzin + liczba imigrantów) – (liczba śmierci + liczba emigrantów)*

Gęstość zaludnienia $= \frac{\text{liczba mieszkańców na danym terenie}}{\text{powierzchnia tego terenu}}$

Długość geograficzna – to kątowe odchylenie danego miejsca na Ziemi od południka zerowego na wschód lub na zachód (od *0* do *180°*).

Szerokość geograficzna – to kątowe odchylenie danego miejsca na Ziemi równika na północ lub na południe (od 0 do *90°*).

b) W fizyce mamy:

Połączenia (elektryczne) **szeregowe** i **równoległe**

Kąt padania promieni słonecznych (może pamiętasz nawet twierdzenie, że: kąt padania = kątowi odbicie ☺)

c) w historii mamy

Chronologię – czasowy układ liniowy

d) w biologii:

Systematykę - układ zależności poprzez stosowanie podziałów (wyszczególnianych poprzez posiadanie określonych cech)

e) **Cybernetyka** - to nauka o związkach między układami i o stabilności tychże układów (a więc czysta matematyka!)
f) W biologii i medycynie mamy **modelowanie matematyczne**. Jego podstawę stanowią modele ekologiczne, budowane na bazie równań różniczkowych i różnicowych, teorii grafów i teorii gier, poszerzone o modele reakcji odpornościowej i podstawy klasycznej genetyki (teoria Mendla) w kontekście łańcuchów Markowa. Brzmi zapewne bardzo mądrze, ale widzisz zapewne, że to znowu czysta matematyka! Dzięki niej możemy modelować choćby: pojedynczą populację, pojedynczą populację w uwzględnieniem wieku, budować modele

oddziaływań między dwiema populacjami, modelować zachowanie się układów odpornościowych, prognozować ewolucję, badać propagację genów, …

g) **modele matematyczne** mamy także w ubezpieczeniach i finansach. Możemy badać tam: efektywność i skuteczność działań, korelację czy wpływu określonych czynników, …
h) geodezja – to nauka o **mierzeniu** ziemi
i) astronomia – nauka o obserwacji i opisie odległych obiektów pozaziemskich, również wykorzystuje szereg narzędzi matematycznych (choćby **pomiary kątowe**, z którymi mamy tez do czynienia w tradycyjnej nawigacji)
j) z zakresu matematyki dyskretnej np.: **szukanie najkrótszej drogi** z jednego miejsca do drugiego, szukanie najkrótszej **drogi obchodu danego terenu** (ważne w pracy listonosza),

Inne zastosowania matematyki:

- Rozkład sił pola - w fizyce,
- zasada bilansu masy i energii – w chemii
- rzutowania – w mapach, w rysunku technicznym
- regresja, progresja, stagnacja – w opisie gospodarki
- modelowanie testów i sposobów ich oddziaływania,
- szyfrowanie, kodowanie, dekodowanie – w kryptografii
- przewidywanie pogody (metodami równań różniczkowych) – w meteorologii
- dobór wysokości (częstotliwości) dźwięków, by współbrzmiały – w muzyce
- takt, rytm – w muzyce
- zagadnienia rywalizacji i kooperacji – w teorii gier
- zagadnienia przydziału zadań (ważna jest ich sekwencja i czas ich wykonywania) – w procesie produkcyjnym

Cóż, można by wymieniać jeszcze długo i wiele…

POSŁOWIE

Jakie są etapy zajmowania się matematyką? Według mnie (znowu to magiczne „P”!): przytulić, poczuć, polubić, pokochać. Oznacza to, że najpierw musisz ją poznać. Wtedy będzie zmógł poczuć o co w niej chodzi. Wiedząc o co w niej chodzi, zapewne ją polubisz, a gdy Cię jeszcze bardziej zauroczy – to nawet pokochasz!

Jeśli dobrnąłeś do tego miejsca – pierwsze „P” (przytulić) – masz już zaliczone! Być może zaczynasz już czuć matematykę. Potem – jak tak dalej pójdzie – istnieje szansa, że ją polubisz (o, tak!). Ja jestem krok dalej – kocham ją!

Życzę Ci, byś i Ty miał swoją działkę, na której będziesz zmógł się realizować – po prostu będziesz robić to co kochasz!

REKOMENDACJA

Dla wielu dorosłych ludzi matematyka jest obcą im dziedziną wiedzy, mimo wieloletniej edukacji szkolnej. Jak się jednak okazuje (sami się o tym przekonuję) – jest im ona w życie potrzebna, i to niemal na każdym kroku. Z myślą o takich właśnie osobach pomyślałem, aby napisać dla nich książkę, która zażegna im w tych ich kłopotach. Na pewno będzie też ona bardzo przydatna dla młodszych osób – uczniów – gdyż pomoże im przełamać się do matematyki poprzez ukazanie jak bardzo jest przydatna w codziennym życiu. Poza tym dowiesz się z niej o pewnych ciekawostkach matematycznych, dzięki czemu z jednej strony będziesz wiedział czym zajmują się matematycy, a z drugie – będziesz mógł „zabłysnąć" w towarzystwie na temat matematyki ☺

Nadmienię też – tu już odnośnie siebie, a jakże! – że mam duże (ponad 30-letnie) doświadczenie w nauczaniu matematyki (na różnych poziomach: SP, LO, technikum, szkoła branżowa, studia), jak i jestem autorem 2 książek w wydawnictwie Publicat (zbiór testów i vademecum dla gimnazjalistów z przedmiotów matematyczno-przyrodniczych), jak i dwóch skryptów dla studentów (z matematyki i z lingwistyki matematycznej). W związku z tym mam nadzieję, że i ta książka dobrze wpisze się w mój dorobek publikacji dydaktycznych.

prof. UAM dr hab. Włodzimierz Lapis

ISBN 978-83-965306-0-8

9 788396 530608